Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hildebrand, Joachim Ernst Albrecht,

Die höhere Geometrie, besonders die Lehre v. d. Kegelschnitten

Berlin 1783

Math.p. 219 t
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082004-0
VD18 11518227-002

Math. P.
219t

§. 54 demonstratio brevior.

$$Gg : GC = Mg : KC$$
$$DE : DC$$
ergo $DE : DC = Mg : KC$

Item
$$Gg : gC = GM : MK$$
$$DE : EC$$
$$DE : DC$$
ergo $DE : DC = GM : MK$

ex utraque proportione tertiam componendo

$$DE^2 : DC^2 = Mg \times GM : KC \times MK$$

$$c^2 : \frac{a^2+c^2}{4} = \frac{c^2}{4} : KC \times MK = \frac{a^2+c^2}{16}$$

R

Die
höhere Geometrie,

beſonders

die Lehre von den Kegelſchnitten,

zum Gebrauch

beym Unterricht in der Realſchule

kurz abgefaſſet

von

J. E. A. Hildebrand,

Lehrer bey der Königlichen Realſchule.

Berlin, 1783.

Im Verlag der Buchhandlung der Realſchule.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhalt.

Von den krummen Linien überhaupt §. 1—7.

I. Von den Eigenschaften der Kegelschnitte.

1. Von der Parabel , , §. 8—29.
2. Von der Hyperbel , , §. 30—61.
3. Von der Ellipse , , §. 62—83.
4. Vom Cirkel. , , §. 84—90.

II. Die Differentialrechnung , §. 91—121.

III. Vom Größten und Kleinsten §. 122—133.

IV. Die

IV. Die Integralrechnung. . . §. 134.

1. Anwendung der Integralrechnung zu Bestimmung des Flächeninhalts . §. 141—154.

2. Anwendung der Integralrechnung zu Bestimmung des Verhältnisses der krummen Linien zu geraden, oder von der Rectification der krummen Linien §. 155—161.

3. Anwendung der Integralrechnung zu Bestimmung des körperlichen Inhalts. §. 162—173.

Von den krummen Linien überhaupt.

§. 1.

Die Entstehung einer krummen Linie kann man sich ohngefähr folgendergestalt vorstellen. Der Punkt a (F. 1.) werde zu gleicher Zeit von einer doppelten Kraft b und c in Bewegung gesetzt; so wird sich derselbe motu per diagonalem composito bewegen, das ist: der Punkt a wird weder der Richtung ab noch der Richtung ac allein folgen, sondern nach dem ersten unendlich kleinen Zeitraum etwa in d, nach dem zweiten in e u. s. f. seyn. Nun sind zwar ad, de u. s. f. eigentlich gerade Linien, da sie aber unendlich klein sind, so machen sie zusammen die krumme Linie adeM.

§. 2.

Die Linie aX wird die Axe oder der Durchmesser genennet. An dieser befindet sich in a der Scheitelpunkt der krummen Linie. Je nachdem

sich nun die krumme Linie von der Axe entfernt, oder auch sich derselben wieder nähert, bekommt sie ihre eigene Benennung.

Die Perpendiculärlinie MP, die die Entfernung jedes Punkts der krummen Linie von der Axe bestimmt, heißt die halbe Ordinate.

Die Entfernung aP aber einer jeden halben Ordinate vom Scheitelpunkt auf der Axe wird die der halben Ordinate zugehörige Abscisse genennet.

Da nun aus jedem Punkt der Axe an die krumme Linie eine Perpendiculärlinie gezogen werden kann, so hat man auch so viel halbe Ordinaten und correspondirende Abscissen.

§. 3.

So lange sich die krumme Linie von der Axe entfernt, ist, genau genommen, keine halbe Ordinate der andern gleich, sondern mit der Länge der krummen Linie, wachsen auch diese, je weiter sie sich vom Scheitelpunkt entfernen, bis die krumme Linie etwa wieder anfängt sich der Axe zu nähern, wie beym Cirkel und der Ellipse. Auch die Abscissen nehmen immer zu, bis sie etwa, wie dis gleichfalls der Fall beym Cirkel und der Ellipse ist, der Axe gleich werden. Man nennt daher die Abscissen und Applikaten veränderliche Linien, und bezeichnet diese gewöhnlich mit y, jene mit x.

§. 4.

Bey Construction einer krummen Linie liegt allemahl eine oder auch zwey beständige oder unveränderliche Linien zum Grunde, nemlich der Parameter, und zwar allemahl, und die Axe. Das

Ver-

Verhältniß nun der halben Ordinaten und Abscissen gegen einander, desgleichen des Parameters, wird durch Gleichungen ausgedrückt, welche die Natur und Eigenschaften einer jeden krummen Linie erklären.

§. 5.

Von den mancherley Eintheilungen der krummen Linien will ich hier nur ganz kurz derjenigen in Geschlechter und Familien gedenken. Jene Eintheilung in Geschlechter hat ihren Nutzen, wenn man wissen will, was man bey Auflösung vorkommender Aufgaben für Linien nöthig habe oder brauchen könne; diese aber in Familien dient zu Erweisung allgemeiner Eigenschaften verschiedener Geschlechter.

§. 6.

Die Aufgaben, die bey Betrachtung der krummen Linien vorkommen, betreffen das Verhältniß der Abscissen zu den halben Ordinaten; die Untersuchung, ob eine krumme Linie ausser ihrem Ursprunge sonst noch die Axe schneide, oder ob ihre Arme ins unendliche fortgehen; die Construction einer jeden krummen Linie aus ihrer Gleichung; ferner ob sie Asymptoten habe oder nicht; wie man durch jeden Punkt derselben eine Tangente ziehen solle; wie das Verhältniß ihrer Länge zur Länge einer geraden Linie zu bestimmen; wie eine krumme Linie zu quadriren, welches ihre größte oder kleinste Applicate sey u. dergl.

§. 7.

Uebrigens wird niemand den Nutzen der höhern Geometrie in Zweifel ziehen, wofern man anders weiß, wie unentbehrlich ihre Kenntniß in den meisten

Theilen der angewandten Mathematik und in der Naturlehre ist. Man hat durch ihre Hülfe Wahrheiten entdeckt, auf die man sonst nicht würde gekommen seyn. Nun kommt es freylich wiederum darauf an, daß man sich überzeuge, die gemachten Entdeckungen selbst seyen nicht ohne Nutzen. S. Jägers Anwendung der Lehre von krummen Linien auf einige Gegenstände der Naturlehre.

I. Von den Eigenschaften der Kegelschnitte.

1. Von der Parabel.

§. 8.

Wenn ein Kegel mit einer seiner Seiten parallel geschnitten wird, so nennt man die krumme Linie MmAnN, (Fig. 2. III.) welche die durch den Schnitt erhaltene Fläche begränzt, eine **Parabel**, und zwar insbesondre die Apollonische.

An dieser krummen Linie nun ist allemahl ein bestimmter Theil der Axe die dritte Proportionallinie zu jedem andern vom Scheitelpunkt entfernten Theil der Axe und der am Ende eines jeden solchen Theils aufgerichteten und die Parabel berührenden Perpendiculärlinie. Jenen bestimmten Theil der Axe nennt man den Parameter, und setzt ihn $= a$. Wenn nun jeder andre Theil der Axe oder jede Abscisse $= x$ und die zugehörige halbe Ordinate $= y$; so ist bey einem solchen Schnitte allemahl $x : y = y : a$.

§. 9.

Ist $x : y = y : a$

so ist $y^2 = ax$. Da nun diese Gleichung die Na-

Natur dieser conischen Section ausdrückt, so nennt man daher auch jede krumme Linie, bey welcher das Quadrat der halben Ordinate gleich einem Rectangel aus der zugehörigen Abscisse in den Parameter, eine Parabel.

§. 10.

Wenn nun in der Parabel $x : y = y : a$ §. 8; so suche man zu jeder Abscisse und dem Parameter die mittlere Proportionallinie, so erhält man für jede Abscisse die ihr correspondirende halbe Ordinate. Zieht man dann die Endpunkte aller dieser mittlern Proportionallinen durch eine krumme Linie zusammen; so erhält man eine Linie, die die Eigenschaften der Parabel hat, und folglich selbst eine Parabel ist.

§. 11.

Man setze zu dem Ende an AC in A (Fig. 5.) die Perpendiculärlinie Ak von unbestimmter Länge, welche die Richtungslinie (Directrix parabolae) genennet wird. AC verlängere man um den Theil AB = dem gegebenen oder angenommenen Parameter. AC theile man in beliebige Theile, je kleiner diese Theile, besonders bey A genommen werden, desto besser geräth die Zeichnung. Aus den Theilungspunkten, 1. F. 2. 3. 4. u. s. w. ziehe man mit der Richtungslinie Parallellinien.

Dann beschreibe man über B1, BF, B2 u. s. w. halbe Cirkelbogen; so ist Ad zwischen AB und A1; Ae zwischen AB und AF; Af zwischen AB und A2 u. s. w. die mittlere Proportionallinie.

Macht man nun 1M = Ad, Fm = Ae, 2m = Af u. s. w.; so sind 1m, Fm, 2m u. s. w. die den Abscissen A1, AF, A2 u. s. w. correspon-

direnbe halbe Ordinaten. Verbindet man endlich die Punkte A, m, m u. s. w. durch eine krumme Linie mit einander, so hat man eine Parabel construirt. Denn weil

1m = Ad

Ad = med. prop. zwischen AB und A1
med. prop. aber zwischen der Abscisse und dem Parameter ist die der Abscisse correspondirende halbe Ordinate

---

F. 1m die halbe Ordinate zur Abscisse A1 u. s. w.

Es ist also die beschriebene krumme Linie eine Parabel, weil sie die Eigenschaft einer Parabel hat.

§. 12.

So wie die Grösse eines Cirkels von der Länge des Radii abhängt, so hängt die Größe einer Parabel von ihrem Parameter ab. Man erhält auf die §. 10. angezeigte Art immer eine Parabel, der Parameter mag groß oder klein seyn; Soll sie daher eine bestimmte Größe haben: so muß auch der Parameter bestimmt seyn. Daraus folgt: mit einerley Parameter läßt sich nur eine Parabel construiren, desgleichen: die Größe einer Parabel hängt nicht von der Länge ihrer Arme ab, sondern von der Länge der Ordinate bey gleicher Länge der correspondirenden Abscisse. Uebrigens sind alle Parabeln einander ähnlich.

§. 13.

In der Parabel (F. 2. III.) verhalten sich allemahl die Quadrate der halben Ordinaten, wie die correspondirenden Abscissen, oder wenn

die eine Absciſſe $AP = X$, ihre Applicate $= Y$
eine andre Absciſſe $Ap = x$ — — $= y$,
ſo iſt $Y^2 : y^2 = X : x$.

MP iſt media prop. zwiſchen DP und BP

F. $DP : MP = MP : BP$

F. $MP^2 = DP \cdot BP$.

und weil mp media prop. zwiſchen dp und bp

ſo iſt $dp : mp = mp : bp$.

F. $mp^2 = dp \cdot bp$.

F. $MP^2 : mp^2 = DP \cdot BP : dp \cdot bp$.
$DP = dp$.

F. $MP^2 : mp^2 = DP \cdot BP : DP \cdot bp$.

F. $MP^2 : mp^2 = BP : bp$.
$BP : bp = AP : Ap$.

F. $MP^2 : mp^2 = Ap : Ap$.
oder $Y^2 : y^2 = X : x$.

Sonſt läßt ſich dieſer Satz auch kurz ſo erweiſen:
Wenn $Y^2 = aX$
und $y^2 = ax$
ſo iſt $Y^2 : y^2 = aX : ax$

F. $Y^2 : y^2 = X : x$.

§. 14.

Die Gleichung der Parabel §. 9. enthält zwey Unterſcheidungskennzeichen derſelben von andern krummen Linien.
Denn wenn $y^2 = ax$
ſo iſt $x : y = y : a$, und alſo iſt

1) jede **halbe Ordinate** media proportionalis zwischen der zugehörigen Abscisse und dem Parameter.

2) der **Parameter** ist allemahl tert. prop. zu jeder Abscisse und ihrer correspondirenden halben Ordinate.

§. 15.

Man soll untersuchen, ob eine krumme Linie AMm (F. 3.) eine Parabel sey.

Soll AMm eine Parabel seyn; so muß ihr Parameter tertia proportionalis seyn zu AP und MP §. 14. Man suche also die dritte Proportionallinie nach geometrischen Grundsätzen, so hat man den Parameter gefunden. Diesen gefundenen Parameter setze man aus P in Q, und beschreibe über AQ einen halben Cirkel; durchschneidet dieser die krumme Linie im Punkte M, als dem Endpunkt der halben Ordinate; so ist alsdenn MP die mittlere Proportionallinie zwischen AP und PQ und folglich die krumme Linie AMm eine Parabel.

§. 16.

Man soll die halbe Ordinate finden, wenn die Abscisse gleich dem 4ten Theil des Parameters.

Ueberhaupt ist $x : y = y : a$

Es soll aber $x = \frac{a}{4}$ seyn

F. $\frac{a}{4} : y = y : a$

F. $y^2 = \frac{a^2}{4}$

F. $y = \frac{a}{2}$ = dem halben Parameter.

Folg-

Folglich ist die Ordinate = a, wenn die correspondirende Absciſſe $= \frac{a}{4}$. Man nennt aber den Punkt in der Axe, in welchem die Ordinate gleich dem Parameter, den **Brennpunkt**.

§. 17.

Soll nun die Entfernung des Brennpunkts von der Scheitel bestimmt werden;

so setze man $y = \frac{a}{2}$ §. 16.

dann ist $y^2 = \frac{a^2}{4}$

da nun sonst $y^2 = ax$

so ist $ax = \frac{a^2}{4}$

F. $x = \frac{a}{4}$.

Die Absciſſe im Brennpunkte ist also gleich dem vierten Theil des gegebenen Parameters.

§. 18.

Das Rectangel aus der Summe je zweyer halben Ordinaten in ihre Differenz, oder (OT + QS). QR (F. 6.) ist gleich dem Rectangel aus dem Parameter in die Differenz der den halben Ordinaten correspondirenden Absciſſen.

Es sey AT = x; AS = z

Weil $OT^2 = ax$ §. 9. so ist $OT = \sqrt{ax}$
$QS^2 = az$ — — $QS = \sqrt{az}$

F. $OT + QS = \sqrt{ax} + \sqrt{az}$
$QR = QS - OT = \sqrt{az} - \sqrt{ax}$.

F. $(OT + QS) . QR = (\sqrt{ax} + \sqrt{az}) . (\sqrt{az} - \sqrt{ax})$
$= az - ax$
$= a . (z - x)$

§. 19.

Wenn $(OT + QS) . QR = a . (z - x)$

so ist $a : OT + QS = QR : z - x$
oder der Parameter verhält sich zur Summe zweyer halben Ordinaten, wie die Differenz dieser halben Ordinaten zur Differenz ihrer correspondirenden Abscissen.

§. 20.

Die Sehnen AG und AM verhalten sich wie die Wurzeln aus den Producten der correspondirenden Abscissen in die Summe aus diesen Abscissen und dem Parameter. (F. 6.)

Man setze $AF = x$, $Ap = z$, den Parameter $= a$.
Weil in F und P rechte Winkel sind;
so ist 1) $AG^2 = FG^2 + AF^2$
$= ax + x^2 = (a + x) x$.

F. $AG = \sqrt{(a + x) x}$
2) $AM^2 = MP^2 + AP^2$
$= az + z^2 = (a + z) z$

F. $AM = \sqrt{(a + z) z}$

F. $AG : AM = \sqrt{(a + x) x} : \sqrt{(a + z) z}$

§. 21.

Eine jede gerade Linie FM, FN, FO, (F. 6.) aus dem Brennpunkt an die Parabel gezogen, heißt ein Brennstrahl (radius foci). radius vector

§. 22.

Ein jeder Brennstrahl ist gleich der Summe aus der corresporrendirenden Abscisse und der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkte.

Wenn AF = der Brennweite; so ist FG = 2AF. §. 16.

Daß aber auch FM = AP + AF kann so erwiesen werden:

In P ist ein rechter Winkel

F. $FM^2 = FP^2 + MP^2$

$$MP^2 = y^2 = ax$$

$$FP = AP - AF$$

$$AF = \frac{a}{4}$$

$$AP = x$$

F. $FP = x - \frac{a}{4}$

$$FP^2 = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$$

F. $FM^2 = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + ax$

$= x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$ (welches eine reine quadr. Gl.)

F. $FM = x + \frac{a}{4} = AP + AF$

Auf

Auf gleiche Art wird erwiesen, daß $FN = AV + AF$
$FO = AT + AF$.

Hic debet Directricis definitio et constructio, item constructio Parabolae ope directricis a theoremate praecedentis.

§. 23.

Wenn (F. 7.) $AB = AF = \frac{a}{4}$, und man errichtet in B eine Perpendiculärlinie BI, auf BI aber aus irgend einem Punkt der Parabel die Perpendiculärlinie IM; so ist IM gleich dem Brennstrahl FM.

In B und P sind rechte Winkel,
folglich $BI \# MP$
$IM \# BP$ ex constr.

F. $IM = BP$
$BP = AP + AB$
$AB = AF$ ex constr.

F. $IM = AP + AF$
und $FM = AP + AF$ §. 22.

F. $IM = FM$. quodvis Parabolae punctum aequidistat a foco et a directrice.

§. 24.

Man soll durch einen gegebenen Punkt der Parabel eine Tangente ziehen. (F. 4)

Ist der Parameter nicht bekannt, so suche man diesen zuvörderst §. 15, um den Brennpunkt zu bestimmen. Dann ziehe man durch den gegebenen Punkt M die Linie BL parallel der Axe. Man mache $BM = FM$ und ziehe BF; ferner mache man $BC = CF$. Durch C und den gegebenen Punkt M ziehe man ET, so ist ET die Tangente durch den Punkt M.

Als Hülfslinien ziehe man noch durch B auf QT die Perpendiculärlinie HI. Auch ziehe man EH und

und GK parallel der Axe, und dann noch BE und EF, BG und FG.

Weil $\triangle$ CFM $\cong$ $\triangle$ BCM (die Seiten sind in beyden $\triangle\triangle$ einander gleich)

so ist 1) $m = n$	2) $m = n$
u. weil $CF = BC$	$CF = BC$
$CG = CG$	$CE = CE$
so ist $\triangle CFG \cong \triangle BCG$	$\triangle CEF \cong \triangle BCE$.
F. $FG = BG$	F. $EF = BE$
Nun ist $u = 90°$	desgleichen $o = 90°$
F. $BG > GK$	F. $BE > EH$.
$BG = FG$	$BE = EF$
F. $FG > GK$.	F. $EF > EH$.

Sollen nun die Punkte E und G in der Parabel liegen, so müßte $FG = GK$ und $EF = EH$ seyn. §. 23.

Es ist aber $FG > GK$ und $EF > EH$ per demonstr.

Folglich können die Punkte E und G nicht in der Parabel liegen, folglich ist der zwischen beyden liegende Punkt M derjenige Punkt, in welchem ET die Parabel berühret, und folglich ist ET die Tangente der Parabel in dem Punkt M.

N. angulus incidentiae = ang. reflexionis, ∠MT = ∠MF proprietas parabolae et usus in optica.

§. 25.

Ist die Tangente gezogen, so hat man auch die Subtangente PT. (F. 4.) Denn wenn die halbe Ordinate MP des gegebenen Punkts M der eine Kathete ist, so ist die Subtangente der andre Kathete an dem rechtwinklichten $\triangle$ MPT, welches diese beyden Linien mit der gezogenen Tangente MT machen. Die Linie MQ aber, welche mit der Tangente im Berührungs-

punkte

punkte einen rechten Winkel macht, und mit dem andern Ende die Axe berührt, heißt die Normallinie. Die Subnormallinie endlich ist der Theil PQ der Axe zwischen der halben Ordinate MP und der Normallinie MQ.

§. 26.

Wenn der Brennstrahl allemahl gleich der Summe aus der Abscisse und der Entfernung des Brennpunkts vom Scheitelpunkte §. 22; so läßt sich auch auf folgende Art sehr leicht eine Parabel zeichnen.

Man trägt nemlich (F. 7.) aus A in B den vierten Theil des Parameters, ziehet dann auf der Axe AP die Perpendiculärlinien FG, mp, MP von unbestimmter Länge, je näher an einander, desto besser. Hierauf macht man $FG = AF + AB$, $Fm = Ap + AB$, $FM = AP + AB$ u. s. w. Dann verbindet man die Punkte A, G, m, M durch eine krumme Linie mit einander, so ist die Parabel fertig.

§. 27.

Auf gleiche Art läßt sich auch eine Regel zu Verfertigung parabolischer Brennspiegel anfertigen: abcd (F. 8.) ist ein Blech, an welchem $bd = \frac{ab}{4} = \frac{a}{4}$. ef ein starker Drath, der auf der einen Setie von b bis d mit dem Bleche eine Ebene macht. In der Mitte der Dicke des Draths von b bis d ist die Axe der Parabel. Hat man nun nach §. 26. die Punkte gefunden, welche die Krümmung der Parabel bestimmen; so ziehe man ad, feile auf eine geschickte Art den Theil acd ab; so ist abd eine Parabel, deren

Axe

Axe gleich der Entfernung des Brennpunkts von der Scheitel.

nopq sey das Profil eines Gipskuchens, in dessen Mitte ein Loch befindlich, in welches der Drath df passet. Wird nun das parabolische Blech zu wiederholten mahlen mit einem geringen Druck gegen den darunter liegenden Gipskuchen um seine Axe gedrehet, so wird dadurch die parabolische Hölung crs, die hier im Durchschnitte vorgestellet ist, formiret. Es ist aber nicht nöthig, daß die Tiefe der Hölung gerade der ganzen Axe bd gleich sey.

Das übrige stellet das Gerüste vor, um den Drath immer in perpendiculärer Richtung zu erhalten, worauf vorzüglich gesehen werden muß. Die Hölung wird dann verguldet, oder mit einer andern, die Strahlen stark reflectirenden Materie, eben ausgelegt.

§. 28.

Aus der Gleichung für die Parabel läßt sich auch bestimmen, ob die Parabel eine in sich wiederkehrende Linie sey.

Soll die krumme Linie die Axe schneiden, so muß die Ordinate an dem Orte = o seyn. Man setze also y = o, so bekommt man statt der Gleichung

$y^2 = ax$ folgende $o = ax$

$(a: \overline{o = x}$. Sie durchschneidet also die Axe in dem Punkte, wo die Abscisse oder x = o, das ist im Scheitelpunkte, und ist also keine in sich wiederkehrende Linie.

§. 29.

Man kann auch blos durch Verbindung dreyer Cirkelbogen von verschiedenen Durchmessern eine Parabel beschreiben.

Auf

Auf der geraden Linie ag, (F. 9.) welche die Axe ist, nimmt man den Theil $af = \frac{1}{4}$ vom Parameter. Durch den Punkt f, welches der Brennpunkt ist, zieht man de = dem Parameter, womit die Parabel construirt werden soll, rechtwinklicht und so daß $df = ef$. Den Theil af theilt man in 6 gleiche Theile; 7 solcher Theile aber setzt man aus f in g, daß also ag in 13 gleiche Theile getheilt ist. Durch den Theilungsgunkt 1 zieht man $bc \# de$, und beschreibt aus g den Bogen bac. Aus c und e macht man mit der Oefnung des Cirkels = dem Parameter de Bogen in h, eben so auch aus b und d in i, dann beschreibt man aus h den Bogen ce, und aus i den Bogen bd; so ist dbace eine Parabel.

2. Von der Hyperbel.

§. 30.

Wird ein Kegel so geschnitten, daß die verlängerte Axe des Schnittes mit der gleichfalls verlängerten Seite BC des Kegels (F. 2. II.) einen Winkel macht, so nennt man die krumme Linie der Fläche MmAnN eine Hyperbel. Der Theil AF, um welchen die Axe AP verlängert ist, heißt die Queraxe, man bezeichnet sie gewöhnlich mit dem Buchstaben a.

§. 31.

An dieser krummen Linie nun ist $ay^2 = abx + bx^2$
oder es ist $b : a = y^2 : ax + x^2$
oder weil $ax + x^2 = (a + x).\,x$
so ist $b : a = y^2 : (a + x)\,x$; d. i. in der Hyperbel verhält sich der Parameter zur Queraxe;
wie das Quadrat jeder halben Ordinate
zum Product aus der correspondirenden Absciſſe in

die

die Summe aus dieser Abscisse und aus der Queraxe.

§. 32.

Man nennt aber auch alle krumme Linien Hyperbeln, bey welchen das Verhältniß des Quadrats der halben Ordinate zum Producte aus der zugehörigen Abscisse in die Summe aus dieser Abscisse und der Queraxe eben dasselbe ist, welches sich zwischen den beyden unveränderlichen Linien, nemlich dem Parameter und der Queraxe, befindet.

§. 33.

Aus der Gleichung §. 31, wodurch die Eigenschaften der Hyperbel erklärt werden, läßt sich für jede Hyperbel sowohl die Queraxe, als auch der Parameter, die dabey zum Grunde liegen, bestimmen. Denn wenn

1) $ay^2 = abx + bx^2$

so ist $ay^2 - abx = bx^2$.

$ay^2 - abx = a.(y^2 - bx)$

F. $a = \dfrac{bx^2}{y^2 - bx^2}$ = der Queraxe. U. wenn

2) $ay^2 = abx + bx^2$.

$abx + bx^2 = (ax + x^2).b$

so ist $\dfrac{ay^2}{ax + x^2} = b$ = dem Parameter.

§. 34.

Die mittlere Proportionallinie zwischen der Queraxe und dem Parameter nennt man die kleine Axe. Setzt man sie = c;

so ist $a : c = c : b$.

F. $c^2 = ab$

und $c = \sqrt{ab}$.

§. 35.

Die Entfernung des Brennpunkts von der Scheitel findet man aus der Gleichung für die Hyperbel folgendergestalt.

Die Entfernung des Brennpunkts von der Scheitel ist gleich derjenigen Absciſſe, deren halbe Ordinate gleich dem halben Parameter. Man setze also in der Gleichung der Hyperbel $\frac{b}{2}$ statt y.

Ist aber $y = \frac{b}{2}$

so ist $y^2 = \frac{b^2}{4}$

F. $ay^2 = \frac{ab^2}{4}$

Es ist aber $ay^2 = abx + bx^2$. §. 31.

F. $abx + bx^2 = \frac{ab^2}{4}$

b:)

$ax + x^2 = \frac{ab}{4}$ (Man ergänze das fehlende Glied)

so ist $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}$

F.

$$\text{F.}\quad x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}}$$

und $$x = \pm\sqrt{\left(\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$$ = CF — AC

ergo $CF = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{4}}$

§. 36.

Man soll den Brennpunkt in der Hyperbel, deren Queraxe und Parameter gegeben sind, geometrisch bestimmen. omitt.

Man suche zuvörderst die kleine Axe §. 34. Es sey z. B. die Queraxe $= 16$, der Parameter $= 4$; so ist die kleine Axe oder $c = \sqrt{16.\,4} = \sqrt{64} = 8$.

Man lasse die Queraxe und gefundene kleine Axe einander rechtwinklicht durchschneiden, so daß $AC = BC$, $CD = CE$; (F. 10.) dann mache man $CF = AD$, so ist $AF = \sqrt{\left(\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$ und F der Brennpunkt.

Denn $AF = CF - AC$.
$CF = AD$

$$\text{F.}\quad AF = AD - AC.$$

$$AD^2 = CD^2 + AC^2$$

$$AC = \frac{a}{2},\; AC^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$CD = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{\frac{ab.}{4}}\ \text{§. 34.}$$

$$CD^2 = \frac{ab}{4}$$

$$AD^2 = \frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$AD = \sqrt{\left(\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}\right)}$$

F. $AF = \sqrt{\left(\frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$

§. 37.

Das Quadrat der halben kleinen Axe ist gleich einem Rectangel aus der Abscisse im Brennpunkt und der Summe aus dieser Abscisse und der Queraxe, oder nach F. 10.

$$CD^2 = AF.\ BF.$$

$CD = \sqrt{\frac{ab}{4}}$ §. 36.

F. $CD^2 = \frac{ab}{4} = x^2 + ax$ §. 35.

F. $CD^2 = x.(x+a)$ oder in Linien ausgedruckt

$$= AF.\ (AF + AB)$$

$$AF + AB = BF.$$

F. $CD^2 = AF.\ BF.$

§. 38.

Das Verhältniß der halben Ordinaten unter einander wird folgendergestalt gefunden.

Da die Fläche bmdn ‡‡ der Grundfläche BMDN des Kegels; so sind beydes Cirkelflächen. BD und bd sind ihre Durchmesser, welche von MN und mn rechtwinklicht durchgeschnitten werden.

Es ist also BP : MP = MP : DP

F. $MP^2 = BP \cdot DP$.

Eben so ist auch bp : mp = mp : dp

F. $mp^2 = bp \cdot dp$.

F. $MP^2 : mp^2 = BP \cdot DP : bp \cdot dp$.

Weil aber BD ‡ bd

so ist BP : bp = FP : Fp.

und DP : dp = AP : Ap.

F. $BP \cdot DP : bp \cdot dp = FP \cdot AP : Fp \cdot Ap$.

Nun war $BP \cdot DP : bp \cdot dp = MP^2 : mp^2$.

F. $MP^2 : mp^2 = FP \cdot AP : Fp \cdot Ap$.

$FP = AF + AP$.

$Fp = AF + Ap$.

F. $MP^2 : mp^2 = (AF + AP) \cdot AP : (AF + Ap) \cdot Ap$,

oder wenn die Abscisse

AP = x, ihre halbe Ordinate MP = y

Ap = v — — — — mp = z

so ist $y^2 : z^2 = (a + x) \cdot x : (a + v) \cdot v$.

und $y : z = \sqrt{(a + x) \cdot x} : \sqrt{(a + v) \cdot v}$.

Es verhalten sich also die halben Ordinaten, wie die Wurzeln aus den Producten der correspondirenden Abscissen in die Summen aus diesen Abscissen und der Querare.

Die Quadrate aber der halben Ordinaten verhalten sich wie die Rectangel aus den zugehörigen Abscissen in die Summen aus diesen Abscissen und der Querare.

§. 39.

Aus der Gleichung für die Hyperbel läßt sich dis Verhältnis noch kürzer finden.

Setzt man
die eine halbe Ordinate $= y$, ihre Abscisse $= x$.
eine andre halbe Ordinate $= z$, ihre Abscisse $= v$.

so ist $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$

und $z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$

F. $y^2 : z^2 = bx + \frac{bx^2}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}$

oder $y^2 : z^2 = x + \frac{x^2}{a} : v + \frac{v^2}{a}$

oder $y^2 : z^2 = ax + x^2 : av + v^2$.
oder $y^2 : z^2 = (a + x).\, x : (a + v).\, v$.
und $y : z = \sqrt{(a + x).\, x} : \sqrt{(a + v).\, v}$.

§. 40.

Das Quadrat der kleinen Axe verhält sich zum Quadrat der Queraxe, wie das Quadrat jeder halben Ordinate, zu einem Rectangel aus der correspondirenden Abscisse in die Summe aus dieser Abscisse und der Queraxe.

Das Quadrat der kleinen Axe ist $= ab$ §. 34.
das Quadrat der Queraxe $= a^2$.

F. Quadr. der kl. Axe : Quadr. der Queraxe $= ab : a^2$
$ab : a^2 = b : a$

F. Quadr. der kl. Axe : Quadr. der Queraxe $= b : a$

Es ist aber $b : a = y^2 : x.\, (a + x)$ §. 31.
oder $b : a = MP^2 : AP.\, BP$.

F. $c^2 : a^2 = MP^2 : AP.\, BP$.

§. 41.

§. 41.

Hyperbeln, die einerley Queraxe und Parameter, folglich auch einerley kleine Axe haben, sind einander gleich.

§. 42.

Sind nun zwey solche gleiche Hyperbeln in der Weite der Queraxe einander entgegengesetzt, und zieht man aus einem Punkt M der einen Hyperbel nach den Brennpunkten beyder Hyperbeln die geraden Linien FM und fM, so ist der Unterschied beyder Linien allemahl gleich der Queraxe, oder

$$fM - FM = AB.$$

Sind beyde Hyperbeln gleich, und ist in C der Mittelpunkt der Queraxe, so ist

$$BC = AC,$$
$$Bf = AF.$$

F. $BC + Bf = AC + AF$, oder $Cf = CF$.

Man setze $Cf = CF = c$; $AC = BC = \frac{a}{2}$

so ist $AF = CF - AC = c - \frac{a}{2}$

und $Af = AC + Cf = c + \frac{a}{2}$

$$FP = AP - AF = x - \left(c - \frac{a}{2}\right) = x - c + \frac{a}{2}.$$

$$fP = FP + CF + Cf.$$

$$= FP + 2CF = x - c + \frac{a}{2} + 2c = x + c + \frac{a}{2}$$

F. $fP^2 = \left(x + c + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + 2cx + c^2 + ax + ac + \frac{a^2}{4}$

$$FP^2 = \left(x - c + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{a^2}{4}$$

Weil der Werth für MP^2 nicht durch den Parameter muß bestimmt seyn; so nehme man die Proportion aus dem 40. §, wo

$$DE^2 : AB^2 = MP^2 : AP.\, BP.$$

und $\left(\frac{DE}{2}\right)^2 : \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MP^2 : AP.\, BP.$

$$\frac{DE}{2} = CD;\ \frac{AB}{2} = AC.$$

F. $CD^2 : AC^2 = MP^2 : AP.\, BP.$

oder $AC^2 : CD^2 = AP.\, BP : MP^2.$

$$AP = x$$

$$BP = AP + AB = x + a$$

F. $AP.\, BP = x.(x + a) = ax + x^2.$

$CD^2 = AF.\, BF.$ §. 37.

$$AF = CF - AC = c - \frac{a}{2}$$

$$BF = AF + AB = c - \frac{a}{2} + a = c + \frac{a}{2}$$

$$CD^2 = \left(c - \frac{a}{2}\right)\cdot\left(c + \frac{a}{2}\right) = c^2 - \frac{a^2}{4}.$$

$AC^2 = \frac{a^2}{4}.$ Man bringe diese Werthe in eine Proportion.

so ist $\frac{a^2}{4} : c^2 - \frac{a^2}{4} = ax + x^2 : MP^2$

oder $a^2 : 4c^2 - a^2 = ax + x^2 : MP.^2$

F. $MP^2 = \frac{(ax + x^2).\,(4c^2 - a^2)}{a^2}$

=4

$$= \frac{4ac^2x}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{a^3x}{a^2} - \frac{a^2x^2}{a^2}$$

$$= \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - ax - x^2.$$

Hieraus suche man nun die Werthe für fM und FM.

Es ist aber $FM^2 = FP^2 + MP^2$.

oder:

$$FM^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - ax - x^2,$$

$$= c^2 - 2cx - ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$F.\ FM = \sqrt{\left(c^2 - 2cx - ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}\right)}$$

$$= c - \frac{a}{2} + \frac{2cx}{a}$$

Ferner ist $fM^2 = fP^2 + MP^2$.

oder:

$$fM^2 = x^2 + 2cx + c^2 + ax + ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - ax - x^2.$$

$$= c^2 + 2cx + ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$F.\ fM = \sqrt{\left(c^2 + 2cx + ac + \frac{a^2}{4} + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}\right)}$$

$$F.\ fM = c + \frac{a}{2} + \frac{2cx}{a}$$

oben war $FM = c - \frac{a}{2} + \frac{2cx}{a}$

$$F.\ fM - FM = a = AB.$$

§. 43.

Weil also in jedem Punkte M der Hyperbel der Unterschied der beyden Linien fM und FM = AB, (F. 10.) so kann man nun auch leicht eine Hyperbel zeichnen, wenn Queraxe und Parameter bekannt sind.

Man verlängert die gegebene Queraxe AB etwa bis K, bestimmt den Brennpunkt F, §. 35, macht Bf = AF. Man setzt fI an fK unter einen spitzen Winkel und macht fL = AB. Aus f werden Bogen beschrieben, (je mehr derselben und je näher an einander solche gezogen werden, desto besser geräth die Zeichnung der Hyperbel.) Dann wird FM = GL, F1 = HL, F2 = IL u. s. w. gemacht. Durch die Punkte A, M, 1, 2 u. s. w. wird eine krumme Linie gezogen, welche die oben angeführte Eigenschaft hat.

Denn weil $fG - GL = fL$
$GL = FM$

so ist $fG - FM = fL = AB$, und M liegt in der Hyperbel.

§. 44.

Man soll durch einen gegebenen Punkt der Hyperbel eine Tangente ziehen.

Man zieht aus dem gegebenen Punkte M nach beyden Brennpunkten F und f die Linien FM und fM, theilt den Winkel FMf in zwey gleiche Theile; so ist die Theilungslinie MT die Tangente an den gegebenen Punkt M der Hyperbel. Man beweise, daß weder N noch Q Punkte in der Hyperbel sind. Sollen die Punkte N und Q in der Hyperbel liegen; so muß fN — FN desgleichen fQ — FQ = AB seyn. §. 42.

Ist nun weder $fN - FN$, noch $fQ - FQ = AB$, so sind auch die Punkte N und Q nicht in der Hyperbel, sondern nur der dazwischen liegende Punkt M; denn man kann sich N und Q unendlich nahe an einander vorstellen.

Man mache $fL = AB$, und ziehe die Linien fN und FN, fQ und FQ, auch ziehe man FL.

Nun ist $LM = FM$

$GL = FG$

$GN = GN$

$o = v.$

F. $\triangle GLN \cong \triangle FGN$,

und $LN = FN$.

$LN + fL = FN + fL$

$fL = AB$.

F. $LN + fL = FN + AB$.

$LN + fL > fN$.

F. $fN < FN + AB$.

$FN = FN$.

F. $fN - FN < AB$; folglich liegt N nicht in der Hyperbel.

Weil ferner $o = v$,

$GL = FG$,

$GQ = GQ$

so ist $\triangle GLQ \cong \triangle FGQ$.

und $LQ = FQ$.

Es ist aber $fL + LQ = fL + FQ$

$fL = AB$.

F. $fL + LQ = FQ + AB$.

$fL + LQ > fQ$

F. $fQ < FQ + AB$.

$$\frac{FQ = FQ}{}$$

F. $fQ + FQ < AB$; folgl. liegt auch Q nicht in der Hyperbel, und QT geht also blos durch den gegebenen Punkt M in der Hyperbel, und folglich ist MT die Tangente der Hyperbel in diesem Punkte.

§. 45.

Zieht man die conjungirte Axe DE durch den Scheitelpunkt rechtwinklicht, so daß AD = AE, (F. 13.) Macht man AC = der halben Queraxe, und ziehet dann aus dem Mittelpunkt der Queraxe C durch die beyden Endpunkte D und E der kleinen Axe DE die geraden Linien CG und Cg; so sind dis die Linien, welche man gewöhnlich die **Asymptoten** der Hyperbel zu nennen pflegt.

§. 46.

Zieht man durch irgend einen Punkt P der Axe mit der conjungirten Axe DE eine Parallellinie Gg; so ist allemahl GM = gm.

In A sind rechte Winkel §. 45, folglich auch in P.

Der Winkel in C ist beyden △△ ACD und CGP gemein, folglich ist auch der Winkel bey D = dem Winkel bey G,

Folglich △ ACD ∽ △ CGP

F. AC: AD = CP: GP.
und AC: AE = CP: gP.
AE = AD.

F. AC: AD = CP: gP.

$$F.\ GP = \frac{CP.\ AD.}{AC.}$$

und

und $gP = \frac{CP.\ AD.}{AC.}$

F. $GP = gP.$

Es ist aber $GP = MP + GM$

$gP = mP + gm$

F. $MP + GM = mP + gm$

$MP = mP$

F. $GM = gm.$

§. 47.

Zieht man aus dem Scheitelpunkt A auf die Asymptote Cg die Linie AH ‡ CG der gegenüber liegenden Asymptote CG, so wird dadurch CE in H in zwey gleiche Theile getheilet, und es ist allemahl $AH = CH = EH.$

Denn weil bey A rechte Winkel sind, §. 45.

und $AD = AE.$

$AC = AC.$

so ist $\triangle ACD \cong \triangle ACE.$

und $CD = CE.$

F. $\frac{CD}{2} = \frac{CE}{2}$

Weil aber AH ‡ CD

so ist $\triangle AEH \sim \triangle CDE.$

F. $AE : AH = DE : CD.$

ist aber $AE = \frac{DE}{2}$

so ist $AH = \frac{CD}{2} = \frac{CE}{2}$

F. $\frac{DE}{2} : \frac{CE}{2} = DE : CD.$

Weil

Weil nun $\triangle AEH \backsim \triangle CDE$.

so ist auch $AE : DE = EH : CE$.

Nun ist $AE = \frac{DE}{2}$

$EH = \frac{CE}{2} = CH$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{F.}\quad AH = \frac{CE}{2} \\ EH = \frac{CE}{2} \\ CH = \frac{CE}{2} \end{array}\right\} \text{F.}\ AH = EH = CH.$$

§. 48.

Unter der Potenz einer Hyperbel versteht man das Quadrat von AH oder AI, (F. 13.) als Seiten des gleichseitigen Parallelogramms ACHI; und weil $AH = EH = CH$ §. 47; so kann man auch die Quadrate dieser Linien darunter verstehen.

§. 49.

Diese Potenz nun oder AH^2 ist allemahl gleich dem vierten Theil der Summe der beyden Quadrate der halben grossen und halben kleinen Axe, oder

$$AH^2 = \frac{AC^2 + AE^2}{4}$$

Weil in A rechte Winkel sind: so ist

$$CE^2 = AC^2 + AE^2$$

$$\text{F.}\ CE = \sqrt{(AC^2 + AE^2)}$$

$$\text{F.}\ \frac{CE}{2} = \frac{\sqrt{(AC^2 + AE^2)}}{2}$$

CE

$$\frac{CE}{2} = AH. \quad \text{§. } 47.$$

$$\text{F. } AH = \frac{\sqrt{(AC^2 + AE^2)}}{2}$$

$$\text{F. } AH^2 = \frac{AC^2 + AE^2}{4} = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

§. 50.

Der Unterschied zwischen GP^2 und MP^2 (F. 13.) ist allemahl gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe.

Weil bey A und P rechte Winkel sind; so ist Gg ‡ DE.

$$\text{F. } AC : AD = CP : GP.$$

$$CP = AC + AP = \frac{a}{2} + x$$

$$AD = \frac{DE}{2}$$

$$DE^2 = ab. \quad \text{§. } 34.$$

$$DE = \sqrt{ab}$$

$$\frac{DE}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{\left(\frac{ab}{4}\right)}$$

$$AD = \sqrt{\left(\frac{ab}{4}\right)}$$

$AC = \frac{a}{2}$. Man bringe diese Werthe in eine Proportion,

$$\text{so ist } \frac{a}{2} : \sqrt{\left(\frac{ab}{4}\right)} = \frac{a}{2} + x : GP.$$

F.

$$\text{F. } \frac{a^2}{4} : \frac{ab}{4} = \frac{a^2}{4} + ax + x^2 : GP^2$$

$$\text{oder } a : b = \frac{a^2}{4} + ax + x^2 : GP^2.$$

$$\text{F. } GP^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2b + abx + bx^2}{a}$$

$$\text{Es ist aber } \frac{abx + bx^2}{a} = MP^2. \text{ §. 31.}$$

$$\text{und } \frac{a^2b}{4a} = \frac{ab}{4} = AD^2 \text{ §. 36.}$$

$$\text{F. } GP^2 = AD^2 + MP^2$$

$$\text{F. } GP^2 - MP^2 = AD^2.$$

AD aber ist die halbe kleine Axe; folglich ist $GP^2 - MP^2$ = dem Quadrat einer beständigen Linie. Je größer nun die Quadrate von GP und MP, je größer folglich auch GP und MP selbst werden, desto kleiner wird in Ansehung dieser Linien der Unterschied zwischen ihnen, oder desto kleiner wird GM. Weil aber das Quadrat dieses Unterschiedes in allen Punkten der Hyperbel = AD^2, so kann auch der Unterschied selbst nie = o werden, das heißt: die geraden Linien CG und Cg können sich nie mit der Hyperbel vereinigen, daher hat man diesen Linien eben den Nahmen Asymptoten gegeben.

§. 51.

Wenn man sich unter GM die Höhe und unter gM (F. 13.) die Länge eines Rectangels vorstellet; so ist dis Rectangel gleich der Differenz der beyden Quadrate von GP und MP, oder

GM

$$\therefore GM.\,gM = GP^2 - MP^2.$$

$gM = MP + gP.$

$gP = GP.$

F. $gM = MP + GP.$

$GM = GP - MP.$

F. $GM.\,gM = (GP - MP).\,(GP + MP)$
oder $GM.\,gM = GP^2 - MP^2.$

Weil aber $GP^2 - MP^2 = AD^2$. §. 50.

so ist auch $GM.\,gM = AD^2$.

§. 52.

Daß die beyden Rectangel LO. OR und lo. or (F. 12.) einander gleich, folgt schon aus dem vorhergehenden. Es kann aber auch noch besonders folgendergestalt erwiesen werden.

Man setze $OR = x$

$or = y$

$OW = ow = \alpha$

$Ow = oW = \beta$

Nun ist $OR \# lo$

F. $\triangle ORW \backsim \triangle loW$

F. $OW : OR = oW : lo.$
oder $\alpha : x = \beta : lo$

F. $lo = \frac{\beta x}{\alpha}$

$or = y$

F. $lo.\,or = \frac{\beta xy}{\alpha}$

und weil $or \# LO.$

so ist $\triangle orw \backsim \triangle LOw$

und $ow : or = Ow : LO.$
oder $\alpha : y = \beta : LO.$

F. $LO = \frac{\beta y}{\alpha}$
$OR = x$

F. $LO.\,OR = \frac{\beta x y}{\alpha}$

oben war $lo.\,or = \frac{\beta x y}{\alpha}$

F. $LO.\,OR = lo.\,or.$

§. 53.

Jede Linie MP, NQ, OR (F. 12.) zwischen der Asymptote und Hyperbel, welche mit der andern Asymptote parallel gezogen worden, ist eine Ordinate der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, wozu jeder correspondirende Theil der Asymptote, von C, dem Mittelpunkt der Queraxe, angerechnet, die Abscisse ist.

§. 54.

Die Potenz der Hyperbel ist allemahl = einem Parallelogramm aus jeder Abscisse in die correspondirende Ordinate zwischen den Asymptoten, oder F. 12.

$AH^2 = Cr.\,or.$

BD $\parallel$ Ww, folgl. der Winkel bey D = dem bey w.
AH $\parallel$ or — — — H = — r.

F. $\triangle ADH \sim \triangle orw.$

F. $ow : or = AD : AH.$

Man setze $ow = \alpha$, $or = y$, $AD = c$
so ist $\alpha : y = c : AH.$

F.

F. $AH = \frac{cy}{\alpha}$

und $AH^2 = \frac{c^2 y^2}{\alpha^2}$

Ferner ist $AH \# lW$ und $AD \# Wo$

F. $\triangle ADH \backsim \triangle loW$

F. $AD : DH = oW : lo.$

$$DH = AH = \frac{cy}{\alpha}$$

$$oW = Ow \text{ und } OW = ow$$

Nun ist $OW . Ow = AD^2$ §. 51.

folglich auch $ow . oW = AD^2$

F. $ow : AD = AD : oW$

oder $\alpha : c = c : oW$

F. $oW = \frac{c^2}{\alpha}$. Man erhält also folgende Proportion,

$$c : \frac{cy}{\alpha} = \frac{c^2}{\alpha} : lo$$

F. $lo = \frac{c^3 y}{c\alpha^2} = \frac{c^2 y}{\alpha^2}$

$$or = y$$

F. $lo . or = \frac{c^2 y^2}{\alpha^2}$

$$\frac{c^2 y^2}{\alpha^2} = AH^2.$$

F. $AH^2 = lo . or.$

$$lo = Cr$$

F. $AH^2 = Cr . or.$

 oder

oder wenn man die Potenzlinie AH, als eine beständige Linie, gleich a setzt: so ist $a^2 = xy$, eine Gleichung für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten.

§. 55.

Aus dieser Gleichung $a^2 = xy$ läßt sich der von den Asymptoten §. 50. berührte Umstand ganz kurz erweisen. Man darf nur einen Werth für die Abscisse bestimmen, welche der Ordinate da, wo sie unendlich klein, oder $= 0$ ist, correspondiret. Wenn also für die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten

$$xy = a^2$$

so ist $x = \frac{a^2}{y}$

Es soll aber $y = 0$ seyn,

folglich ist $x = \frac{a^2}{0}$.

$\frac{a^2}{0}$ ist ein Bruch, dessen Nenner zum Zähler kein Verhältniß hat, oder welcher $= \infty$ ist.

F. ist $x = \infty$. Wo also die Abscisse, oder Asymptote selbst, unendlich groß ist, da wird sie von der Hyperbel durchschnitten, das heißt, es geschicht dis niemahls.

§. 56.

Wenn aber $a^2 = xy$

so ist $x : a = a : y$. Es ist also jede Ordinate an der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten allemahl die dritte Proportionallinie zur correspondi-

direnden Abscisse und zur Potenzlinie der Hyperbel, denn diese wurde = a gesetzt. §. 54.

§. 57.

Nun läßt sich auch leicht eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten beschreiben, wenn der Asymptoten Winkel ICH und die Seite CH der Potenz (F. 12.) gegeben ist. Man sucht nemlich zu jeder Abscisse auf der Asymptote und zu der gegebenen Potenzlinie die dritte Proportionallinie, so bekommt man die correspondirende Ordinaten; wird nun durch deren Endpunkte eine krumme Linie gezogen, so hat man eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gezeichnet.

Man construire zu dem Ende mit den Asymptoten Winkel C und der Potenzlinie CH das gleichseitige Parallelogramm ACHI. Man verlängere die Potenzlinie AH nach Belieben bis γ. Auf $A\gamma$ nehme man gewisse Punkte α, β, γ u. s. w. an, (je mehrere und je näher an einander dieselben genommen werden, desto besser geräth die Zeichnung der Hyperbel)

Man ziehe ferner die Linien $C\alpha$, $C\beta$, $C\gamma$ u. s. w., welche die Potenzlinie AI in den Punkten 1, 2, 3 schneiden. Dann ziehe man αP, βQ, γR parallel der Potenzlinie CH, und mache die Ordinaten $MP = I3$, $NQ = I2$, $OR = I1$. Durch die Punkte A, M, N, O ziehe man eine krumme Linie, so ist die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten gezeichnet.

Denn weil $\gamma H \# BC$
$\alpha P \# CH$

so ist $\alpha P = CH$

und weil $\triangle \alpha CP \sim \triangle CI3$

so ist $CP : \alpha P = CI : I3$

$$\frac{\begin{array}{r} I3 = MP = y \\ CP = x \quad CI = CH = \alpha P = a \end{array}}{}$$

F. $x : a = a : y$. Mit den übrigen Ordinaten verhält sichs eben so.

§. 58.

Ist der eine Arm auf die §. 57. beschriebene Art construiret, so kann man auch sehr leicht den andern zeichnen.

Man ziehe nach Belieben die Linie BF (F. 12.) und mache FG = BK, desgleichen LX, und mache XZ = LN, und so an mehrern Orten, dann ziehe man AGZ zusammen.

§. 59.

Soll durch einen gegebenen Punkt der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten eine Tangente gezogen werden, so ziehe man aus dem gegebenen Punkt E mit der Potenzlinie AH die Parallellinie DE, (F. 12.) mache DF = CD und ziehe durch F und den Punkt E die Linie FI, so ist EF = EI und FI eine Tangente durch den gegebenen Punkt E.

§. 60.

Ist bey einer Hyperbel die conjungirte Axe gleich der Queraxe, so ist auch der Parameter gleich der Queraxe, und dann nennt man eine solche Hyperbel gleichseitig.

Denn wenn $a : c = c : b$ §. 34.

so ist $ab = c^2$, ist aber $c = a$

so ist $ab = a^2$

F. $b = a$.

§. 61.

Hieraus ergiebt sich die besondre Gleichung für die gleichseitige Hyperbel; denn wenn überhaupt

$$ay^2 = abx + bx^2, \quad b \text{ aber} = a$$

$$\text{so ist } by^2 = b^2x + bx^2$$

$$\text{F. } y^2 = bx + x^2,$$ Eine Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Absicht auf die Ordinaten.

3. Von der Ellipse.

§. 62.

Wenn ein Kegel dergestalt geschnitten wird, daß die Axe AB der Fläche AmMBNnA (F. 1. I.) verlängert mit dem gleichfalls verlängerten Durchmesser BD der Grundfläche des Kegels einen Winkel macht, so erhält man eine elliptische Fläche, und die krumme Linie, die diese Fläche einschließt, ist eine Ellipse.

§. 63.

Wie sich im vorhergehenden die besondern Eigenschaften der Parabel und Hyperbel durch das Verhältniß gewisser gerader daran gezogener Linien erklären ließen, so ists auch bey der Ellipse. Diese gerade Linien aber sind, ausser den Applicaten und Abscissen, der Parameter, (der zwar in der Figur nicht besonders gezeichnet, doch aber auch bey der Ellipse eine unveränderliche Linie und gleichsam der Modul für die übrigen ist, übrigens aber gewöhnlich durch b ausgedruckt wird) die große und die kleine Axe, welche einander in der Mitte rechtwinklicht schneiden: jene wird durch a bezeichnet, diese mag in der Folge c heissen.

§. 64.

Die algebraische Gleichung, wodurch die Ellipse erklärt wird, ist $ay^2 = abx - bx^2$. Zuvörderst erklärt diese Gleichung nur die Natur desjenigen Kegelschnittes, den Apollonius die Ellipse nennet, dann aber auch alle krumme Linien, in welchen sich eben dasselbe Verhältniß der §. 63. angeführten geraden Linien findet, und die man daher auch Ellipsen zu nennen pflegt. Vide statim theorema §. 70.

§. 65.

Es läßt sich aber die Gleichung der Ellipse in folgende Proportion verwandeln. Denn wenn nach (Fig. 14.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

oder $ay^2 = b.(ax - x^2)$

so ist $a : b = ax - x^2 : y^2$.

oder $AB : b = AB.AP - AP^2 : MP^2$.

$$AB.AP - AP^2 = (AB - AP)AP$$

$$AB - AP = BP.$$

F. $AB : b = BP.AP : MP^2$.

oder $b : AB = MP^2 : BP.AP$. d. i. der Parameter verhält sich zur großen Axe, wie das Quadrat jeder halben Ordinate zu dem Rectangel aus den beyden Theilen der großen Axe, in welche sie von der halben Ordinate getheilt wird.

explicandum statim theorema §. 77.

§. 66.

Reducirt man die Gleichung für die Ellipse, so läßt sich der Werth einer jeden Linie, wodurch die Ellipse erklärt wird, besonders bestimmen, und zwar

1) der

1) der Werth des Quadrats der halben Ordinate. Denn wenn

$$ay^2 = abx - bx^2$$

so ist $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$

$$\frac{bx^2}{a} = \frac{bx}{a} . x$$

$\frac{bx}{a}$ ist quarta prop. zu a, b u. x

F. $\frac{bx^2}{a}$ = einem Rectangel, dessen eine Seite die vierte Proportionallinie zur großen Axe, zum Parameter und zur Abscisse, die andre Seite aber die Abscisse ist.

bx = einem Rectangel aus dem Parameter in die Abscisse.

F. Das Quadrat jeder halben Ordinate ist gleich einem Rectangel aus der correspondirenden Abscisse in den Parameter weniger einem andern Rectangel, dessen eine Seite die vierte Proportionallinie zur großen Axe, zum Parameter und zur correspondirenden Abscisse, die andre aber die correspondirende Abscisse selbst ist.

§. 67.

2) Der Werth der großen Axe.

Wenn $ay^2 = abx - bx^2$

so ist $bx^2 = abx - ay^2 = (bx - y^2)\,a$

F. $\frac{bx^2}{bx - y^2} = a =$ der großen Axe.

Resolvirt man diesen Werth in eine Proportion,

so ist $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : \frac{bx^2}{bx - y^2}$.

$\frac{bx - y^2}{b} = x - \frac{y^2}{b}$

$\frac{y^2}{b}$ ist die dritte Proportionallinie zum Parameter u. zur halben Ordinate.

Folglich ist die große Axe oder $\frac{bx^2}{bx - y^2}$ die dritte Proportionallinie zur Abscisse weniger der dritten Proportionallinie zum Parameter und der halben Ordinate, und zur Abscisse.

Construiret man nun diese dritte Proportionallinie, so erhält man die große Axe.

Man errichte daher (F. 15.) auf einer Linie von unbestimmter Länge in P eine Perpendiculärlinie $MP = y$, und mache $EP = b$, $FP = MP$, ziehe EM und mache FG ♯ EM. Ferner mache man $OP = x$, $NO = GP$, $LP = NP$ und $AP = OP$. Man ziehe AB ♯ LO,

so ist $BP = a = \frac{bx^2}{bx - y^2}$.

Denn weil EM ♯ FG

so ist $\triangle EMP \backsim \triangle FGP$

F. $EP : MP = FP : GP$.

oder

oder $b : y = y : GP$.

F. $GP = \frac{y^2}{b}$

Auch ist $LO \# AB$

F. $\triangle LOP \backsim \triangle ABP$

F. $LP : OP = AP : BP$.

$LP = NP$

$NP = OP - NO$

$NO = GP = \frac{y^2}{b}$.

F. $LP = x - \frac{y^2}{b}$

F. $x - \frac{y^2}{b} : x = x : BP$.

F. $BP = x^2 : \frac{bx - y}{b} = x^2 . \frac{b}{bx - y^2} = \frac{bx^2}{bx - y^2}$.

§. 68.

3. Der Werth des Parameters.

Wenn $ay^2 = abx - bx^2 = (ax - x^2)\, b$

so ist $\frac{ay^2}{ax - x^2} = b =$ dem Parameter.

Dieser gefundene Werth für den Parameter ist die vierte Proportionallinie zu $a - x$, $\frac{ay}{x}$ und zu y; Man findet aber diese vierte Proportionallinie folgendergestalt.

Es sey $AB = a$, $BC \# MP$, $BD = MP$ und $DE \# CP$. (F. 16.)

so

so ist $BE = b = \frac{ay^2}{ax - x^2}$

Weil $MP \# BC$

so ist $\triangle AMP \sim \triangle ABC$.

F. $AP : MP = AB : BC$.
oder $x : y = a : BC$

F. $BC = \frac{ay}{x}$

Und weil $CP \# DE$.

so ist $\triangle BCP \sim \triangle BDE$.

F. $BP : BC = BD : BE$.
$BP = AB - AP = a - x$

F. $a - x : \frac{ay}{x} = y : BE$

F. $BE = \frac{ay^2}{ax - x^2}$.

§. 69.

4. Der Werth jeder halben Ordinate.

Weil $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ §. 66.

$$bx - \frac{bx^2}{a} = \left(b - \frac{bx}{a}\right)x$$

so ist $y = \sqrt{\left(x\left(b - \frac{bx}{a}\right)\right)}$

Die Linie aber, deren Werth gleich $\sqrt{\left(x.\left(b - \frac{bx}{a}\right)\right)}$, findet man also.

Man

Man setze (F. 17.) die große Axe AB = a mit dem Parameter BC = b rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Linie AC. AP = x sey die Abscisse. Man mache DP ‡‡ BC und DE ‡‡ AB. Ferner mache man FP = CE und beschreibe über AF einen halben Cirkel. DP verlängere man bis an die Peripherie, so ist

$$MP = y = \sqrt{\left(x\left(b - \frac{bx}{a}\right)\right)}$$

Denn weil BC ‡‡ DP.

so ist △ ABC ∽ △ ADP.

F. AB : BC = AP : DP
oder a : b = x : DP.

F. $DP = \frac{bx}{a}$

Ferner ist CE = BC — BE
BE = DP {weil BE ‡‡ DP und DE ‡‡ BP.

F. $CE = b - \frac{bx}{a}$

CE = FP

F. $FP = b - \frac{bx}{a}$

Nun ist AP : MP : MP : FP.

F. $MP^2 = AP . FP.$

$$= x.\left(b - \frac{bx}{a}\right)$$

und $MP = \sqrt{\left(x.\left(b - \frac{bx}{a}\right)\right)} = y$,

be-

bestimmt durch den Parameter, durch die Axe und correspondirende Abscisse.

§. 70.

Aus der Gleichung der Ellipse läßt sich auch die Eigenschaft, die sie mit dem Cirkel gemein hat, daß sie nemlich eine in sich wiederkehrende Linie sey, herleiten. Soll sie aber diese Eigenschaft haben, so muß sie auch die Axe ausser in ihrem Ursprunge noch einmahl durchschneiden, in dem Punkte aber, wo dis geschicht, muß alsdann die Abscisse oder $x = a$ seyn.

Da nun überhaupt $ay^2 = abx - bx^2$

so ist, wenn $x = a$, $ay^2 = a^2b - a^2b = 0$.

F. $y^2 = 0$ und also auch $y = 0$

Wenn also die Abscisse gleich der Axe wird, so wird $y = 0$, das heißt: die krumme Linie läuft dann in die Axe. So wie es aber auf der einen Seite der Axe ist, so ists auch auf der andern.

§. 71.

In Ansehung des im vorhergehenden §. angeführten Punktes ist also die Ellipse dem Cirkel ähnlich, dadurch aber unterscheidet sie sich vom Cirkel, daß sie zwey verschiedene Axen hat. Man findet dis gleichfals aus ihrer Gleichung. Man darf nur untersuchen, wie groß die halbe Ordinate sey, wenn die correspondirende Abscisse oder $x = \frac{a}{2}$

Man bekommt dann statt $ay^2 = abx - bx^2$

folgende Gleichung $ay^2 = \frac{a^2b}{2} - \frac{a^2b}{4} = \frac{a^2b}{4}$

$$\text{F.}\ y^2 = \frac{ab}{4} \text{ oder } \frac{a}{4} . b$$

$$\text{F.}\ \frac{a}{4} : y = y : b.$$

Wenn also die Abscisse gleich der halben Axe, so ist die correspondirende halbe Ordinate die mittlere Proportionallinie zwischen den vierten Theil der Axe und dem Parameter. Man nennt aber die Ordinate in der Mitte der Axe, die andre Axe, und zwar **die kleine**, jene aber **die große Axe.**

§. 72.

Man kann also die kleine Axe aus der großen Axe und aus dem Parameter bestimmen.

Man sucht nemlich einen Werth für die Ordinate, welche die große Axe in der Mitte schneidet, so hat man den Werth für die kleine Axe gefunden.

Man setze also wiederum $x = \frac{a}{2}$, den Parameter $= b$, die Ordinate im Mittelpunkte der großen Axe $= c$, folglich die halbe Ordinate daselbst $= \frac{c}{2}$

Weil nun (F. 18.) AC. BC : CD² = AB : b nach §. 65.

$$\text{oder } \frac{a}{2} . \frac{a}{2} : \frac{c^2}{4} = a : b.$$

$$\text{so ist } \frac{a^2 b}{4} = \frac{a c^2}{4}$$

$$a:)$$

$$\text{und } \frac{ab}{4} = \frac{c^2}{4} = CD^2.$$

und

und $ab = c^2$

F. $\sqrt{ab} = c.$

F. $a : c = c : b.$

Es ist also die kleine Axe die mittlere Proportionallinie zwischen der großen Axe und dem Parameter.

§. 73.

Nach catoptrischen Grundsätzen, die sich auf angestellte Versuche gründen, werden die mit der Axe parallel einfallenden Strahlen von der krummen Oberfläche so reflectirt, daß sie in einem Punkt der großen Axe vereinigt werden, welcher von der Scheitel um den vierten Theil des Parameters entfernt ist. Man nennt daher diesen Punkt den Brennpunkt, die Ordinate aber, die durch diesen Punkt der großen Axe gehet, ist gleich dem Parameter.

§. 74.

Man soll die Brennweite in der Ellipse bestimmen.

Weil im Brennpunkte die der Abscisse correspondirende halbe Ordinate oder $y = \frac{b}{2}$ §. 73, so setze man diesen besondern Werth in der allgemeinen Gleichung.

Wenn also $y = \frac{b}{2}$

so ist $y^2 = \frac{b^2}{4}$

und $ay^2 = \frac{ab^2}{4}$

Es

Es ist aber sonst $ay^2 = abx - bx^2$

$$\text{F.}\quad bx^2 - abx = -\frac{ab^2}{4}$$

$$b:)\overline{\qquad\qquad\qquad}$$

(Man ergänze das fehlende Glied) oder $x^2 - ax = -\frac{ab}{4}$

so ist $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}$

$$\text{F.}\quad x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$$

und $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

Es ist aber auch die Wurzel $\frac{a}{2} - x = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

und dann ist gleichfalls $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

§. 75.

Will man diesen gefundenen Werth (F. 18.) für die Brennweite würklich auf der großen Axe bestimmen, so trage man auf die große Axe AB = a den halben Parameter BE = $\frac{b}{2}$ aus B in E. In C sey der Mittelpunkt der großen Axe. Ueber AE beschreibe man einen halben Cirkel, und mache CF = Cf = CG, so sind in F und f die beyden Brennpunkte, und AF und Af die Entfernungen der Brennpunkte vom Scheitelpunkt A.

$$AC = BC = \frac{a}{2}$$

$$BE = \frac{b}{2} \text{ ex constr.}$$

$$CE = BC - BE = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

Nun ist $AC : CG = CG : CE$

F. $CG^2 = AC . CE$

$$= \frac{a}{2} . \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}$$

F. $CG = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

$CG = CF = Cf$

F. CF und $Cf = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

Es ist aber $AF = AC - CF$

F. $AF = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

und $Af = AC + Cf$

F. $Af = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

Auch ist $Bf = BC - Cf$

F. $Bf = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}$

§. 76.

Das Rectangel (F. 14.) aus der Brennweite den andern Theil der großen Axe ist gleich dem

determinare ax − x² in foro

Rectangel aus der ganzen großen Axe in den vierten Theil des Parameters.

Ist $y = \frac{b}{2}$, so ist $ay^2 = \frac{ab^2}{4}$

und dann ist $\frac{ab^2}{4} = abx - bx^2$ §. 74.

und $\frac{ab}{4} = ax - x^2$

$= (a - x)\,x.$

$= (AB - AF)\,AF.$

$AB - AF = BF.$

F. a. $\frac{b}{4} = AF.\,BF.$

§. 77.

Die Quadrate der halben Ordinaten verhalten sich wie die Rectangel aus den beyden correspondirenden Theilen der großen Axe.

Es sey

die eine Absciſſe $AP = x$, ihre halbe Ordinate $MP = y$

eine andre Absciſſe $AF = v$, — — $FR = z$

so ist $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$

und $z^2 = bv - \frac{bv^2}{a}$

F. $y^2 : z^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bv - \frac{bv^2}{a}$

oder $y^2 : z^2 = abx - bx^2 : abv - bv^2$.

oder $y^2 : z^2 = ax - x^2 : av - v^2$.

oder $y^2 : z^2 = x\,(a - x) : v\,(a - v)$ oder durch Linien.

$$MP^2 : FR^2 = AP\,(AB - AP) : AF\,(AB - AF)$$

$$AB - AP = BP,\ AB - AF = BF$$

$$\text{F. } MP^2 : FR^2 = AP.\,BP : AF.\,BF$$

und $MP : FR = \sqrt{(AP.\,BP)} : \sqrt{(AF.\,BF)}$

Es verhalten sich also die halben Ordinaten selbst, wie die Wurzeln aus den Rectangeln der correspondirenden Theile der großen Axe.

§. 78.

Die Linie DF (F. 18.) aus dem Brennpunkte F an das Ende der halben kleinen Axe CD ist allemahl gleich der halben großen Axe, oder

$$DF = AC.$$

Weil in C rechte Winkel sind,

so ist $DF^2 = CD^2 + CF^2$

$$CF = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)}\ \text{§. 75.}$$

$$\text{F. } CF^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}$$

$$CD^2 = \frac{ab}{4}\ \text{§. 72.}$$

$$\text{F. } DF^2 = \frac{ab}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{F. } DF = \frac{a}{2} = AC.$$

§. 79.

Will man also die Brennpunkte in einer Ellipse bestimmen, so nehme man die halbe große Axe (F. 18.) und beschreibe damit aus dem Endpunkte D der hal-

halben kleinen Axe CD auf der großen Axe in F und f Bogen, so weiß man, wo die Brennpunkte ihren Ort haben.

§. 80.

Weil $DF = Df = \frac{a}{2}$

so ist $DF + Df = a$. Es sind aber auch allemahl je zwey andre Linien FM und fM, die aus beyden Brennpunkten in irgend einem Punkt M der Ellipse sich vereinigen, zusammengenommen gleich der großen Axe, oder

$$FM + fM = a.$$

Zieht man die halbe Ordinate MP, so sind in P rechte Winkel, folglich

1) $FM^2 = FP^2 + MP^2$.

$$FP = CF - CP$$

$$CF = Cf = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)} \text{ §. 75.}$$

$$CP = AC - AP = \frac{a}{2} - x.$$

$$\text{F. } FP = \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)} - \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

Man setze $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4}\right)} = c$

so ist $FP = c - \frac{a}{2} + x$

und $FP^2 = c^2 - ac + \frac{a^2}{4} + 2cx - ax + x^2$

 MP²

MP^2 wird durch folgende Proportion gefunden:

$$AC. BC : AP. BP = CD^2 : MP^2. \quad \S. 77.$$
$$AC = BC$$

$$\text{F.}\ AC^2 : AP. BP = CD^2 : MP^2.$$

$$CD^2 = \frac{ab}{4} \quad \S. 72.$$

$$\frac{ab}{4} = AF. BF \quad \S. 76.$$

$$AF = AC - CF = \frac{a}{2} - c$$

$$BF = BC + CF = \frac{a}{2} + c$$

$$\text{F.}\ AF. BF = \frac{a^2}{4} - c^2.$$

$$AP = x$$

$$BP = AB - AP = a - x$$

$$\text{F.}\ AP. BP = x.(a - x) = ax - x^2.$$

$$AC = \frac{a}{2} \text{ und } AC^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{F.}\ \frac{a^2}{4} : ax - x^2 = \frac{a^2}{4} c^2 : MP^2.$$

$$\text{F.}\ MP^2 = \frac{(\frac{1}{4}a^2 - c^2)(ax - x^2)}{\frac{1}{4}a^2}$$

$$= \left(\frac{a^3x}{4} - \frac{a^2x^2}{4} - ac^2x + c^2x^2\right) : \frac{a^2}{4}$$

$$= \left(\frac{a^3x}{4} - \frac{a^2x^2}{4} - ac^2x + c^2x^2\right) . \frac{4}{a^2}$$

F.

F. $MP^2 = ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

F. $FM^2 = c^2 - ac + \frac{a^2}{4} + 2cx - ax + x^2 + ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

$= c^2 - ac + \frac{a^2}{4} + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

F. $FM = \sqrt{\left(c^2 - ac + \frac{a^2}{4} + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}\right)}$

$= c - \frac{a}{2} - \frac{2cx}{a}$ oder auch $\frac{a}{2} - c + \frac{2cx}{a}$. Weil aber $c = CF$, $\frac{a}{2} = AC$, so kann nur die letzte Wurzel gelten.

2) $fM^2 = fP^2 + MP^2$.

$fP = Cf + CP$.

$= c + \frac{a}{2} - x$.

und $fP^2 = c^2 + ac + \frac{a^2}{4} - 2cx - ax + x^2$

F. $fM^2 = c^2 + ac + \frac{}{4} - 2cx - ax + x^2 + ax - x^2 - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

$= c^2 + ac + \frac{a^2}{4} - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$

F. $fM = \sqrt{\left(c^2 + ac + \frac{a^2}{4} - 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}\right)}$

$= \frac{a}{2} + c - \frac{2cx}{a}$.

oben war $FM \frac{a}{2} - c + \frac{2cx}{a}$

$\mathfrak{F}.\ FM + fM = a.$

§. 81.

Weil also in allen Punkten der Ellipse $FM + fM =$ der großen Axe, so kann man nun auch leicht vermittelst eines Fadens eine Ellipse aus ihren Brennpunkten beschreiben.

Soll die Ellipse eine bestimmte Größe haben, so muß die große Axe und der Parameter bestimmt seyn.

Es sey die große Axe $AB = 48$, der Parameter $= 12$, so ist die kleine Axe $= \sqrt{(48.12.)} = 24$. §. 72. (F. 19.)

Man lasse beyde Axen sich rechtwinklicht durchschneiden, so daß $AC = BC$, $CD = CE$, und dann bestimme man auf der großen Axe die Brennpunkte nach §. 79.

In F und B schlage man Nadeln ein, und binde einen Faden darum, dann bringe man die Nadel aus B in f, dehne durch Hülfe einer Bleyfeder oder eines andern Stifts den Faden aus, und beschreibe damit die Linie ADMBEA, so ist die Ellipse fertig. Denn weil in allen Punkten M der krummen Linie $FM + fM = AB$, so hat diese Linie die Eigenschaft einer Ellipse, und ist also selbst eine Ellipse.

§. 82.

Soll man an einen Punkt der Ellipse eine Tangente ziehen; so ziehe man durch den gegebenen Punkt M aus dem entferntern Brennpunkt f eine gerade Linie und

und mache MN = FM (F. 20.). Man ziehe FN uud mache FQ = NQ. Durch M und Q ziehe man die Linie OT; diese ist die Tangente durch den gegebenenen Punkt M.

Wenn nun erwiesen werden kann, daß weder O noch P in der Ellipse liegen, so ist, wenn man annimmt, daß die beyden Punkte O und P einander unendlich nahe liegen, auch erwiesen, daß die Linie OT die Ellipse bloß in dem Punkte M berühre und folglich die Tangente in diesem Punkte sey.

Sollte O und P in der Ellipse liegen, so müßte sowohl FP + fP auch FO + fO = AB seyn §. 80. Kann nun erwiesen werden, daß keines von beyden sey, so kann auch weder der Punkt O noch P in der Ellipse liegen, folglich muß es M seyn.

MN = FM ex constr.
fN = fM + MN

F. fN = fM + FM
fM + FM = AB §. 80.

F. fN = AB.

Nun ist FM = MN, FQ = NQ } ex constr.
MQ = MQ

F. △ FMQ ≅ △ MNQ.
F. x = y
und weil FQ = NQ.
PQ = PQ

so ist △ FPQ ≅ △ NPQ
und FP = NP.
Und weil x = y
FQ = NQ
OQ = OQ

so ist auch $\triangle FOQ \cong \triangle NOQ$
und $FO = NO$.

Nun ist $fP + NP = fP + FP$.
$fP + NP > fN$
$fN = AB$

F. $fP + FP > AB$.

Auch ist $FO + NO = fO + FO$
$fO + NO > fN$
$fN = AB$

F. $fO + FO > AB$.

Da nun also weder $fO + FO$ noch $fP + FP = AB$, so kann auch weder O noch P in der Ellipse liegen, und folglich ist die Linie OT die Tangente der Ellipse in dem Punkte M.

§. 83.

Die Winkel, welche die beyden aus den Brennpunkten nach einen gemeinschaftlichen Punkt in der Ellipse gezogenen Linien FM und fM machen, sind einander gleich, oder

Wink. $FMP = OMf$

Weil $\triangle FMQ \cong \triangle MNQ$ §. 82.

so ist Wink. $FMP = NMP$
Wink. $NMP = OMf$

F. Wink. $FMP = OMf$.

Dis dient zu Erklärung einer besondern Eigenschaft der elliptischen Holspiegel. Denn wenn in dem einen Brennpunkte ein Licht befindlich, so werden alle Strahlen, die davon auf die elliptische Fläche fallen, so reflectirt, daß sie sich in dem andern Brennpunkt vereinigen. Und in elliptischen Gewölben hört der, welcher sich in dem einen Brennpunkte befindet, genau,

was

was ein andrer in dem andern Brennpunkte spricht, obgleich die übrigen nichts davon vernehmen. Daß aber einzig oder auch vorzüglich dieses Umstandes wegen elliptisch gebauete Kirchen und Schauspielhäuser vor allen andern Figuren den Vorzug verdienen sollen, würde sich dann nur behaupten lassen, wenn man die Zuhörer insgesamt in dem einen Brennpunkte vereinigen könnte.

4. Vom Cirkel.

§. 84.

Wenn ein Kegel mit seiner Grundfläche parallel geschnitten wird, so ist allemahl die Durchschnittsfläche der Grundfläche ähnlich, folglich allemahl eine Cirkelfläche, und die krumme Linie, die diese Fläche einschließt, ein Cirkel.

§. 85.

Man kann also auch den Cirkel unter die Sectiones conicas rechnen, und die Eigenschaften desselben eben so, wie bey den übrigen Kegelschnitten, durch das Verhältniß gewisser gerader Linien bestimmen.

§. 86.

Weil im Cirkel die Perpendiculärlinie MP (F. 27.) die mittlere Proportionallinie ist zwischen den beyden Theilen AP und BP des Durchmessers AB; so ist $AP : MP = MP : BP$.

$$BP = AB - AP$$

F. $MP^2 = AP. (AB - AP)$

oder $y^2 = x. \quad (a - x) = ax - x^2$, eine

Glei-

Gleichung, wodurch die Eigenschaften des Cirkels erklärt werden, wenn man nemlich den Anfang der Abscissenlinie in den Scheitelpunkt A setzt.

Der Cirkel ist also diejenige krumme Linie, an welcher das Quadrat jeder halben Ordinate gleich einem Rectangel aus der correspondirenden Abscisse in die Differenz zwischen dem Durchmesser und der correspondirenden Abscisse.

§. 87.

Wollte man a priori aus dieser Gleichung des Cirkels bestimmen, ob der Cirkel eine in sich wiederkehrende Linie sey, so setze man $y = 0$. Denn soll eine krumme Linie die Axe ausser in ihrem Ursprunge sonst noch schneiden, so muß auch da die halbe Ordinate gleich 0 seyn.

Wenn nun $y^2 = ax - x^2$

so ist für diesen Fall $0 = ax - x^2$

F. $x^2 = ax$

und $x = a$. Die halbe Ordinate wird also $= 0$, oder der Cirkel schneidet nicht nur überhaupt die Axe, sondern auch da, wo die Abscisse gleich wird dem Durchmesser. eben wo die Abscisse = 0

§. 88.

Wie groß ist die Ordinate, wenn die correspondirende Abscisse gleich ist dem halben Durchmesser?

Man setze in der Gleichung des Cirkels $\frac{a}{2}$ statt x

so ist $y^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$ $\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\right)$

$$\text{F. } y = \frac{a}{2}$$

und $2y = a$

§. 89.

Man soll durch einen gegebenen ausserhalb der Peripherie liegenden Punkt eine Tangente an den Cirkel ziehen. (F. 27.)

Man verbindet den gegebenen Punkt G und den Mittelpunkt des Cirkels C durch die gerade Linie CG, macht CN = GN und beschreibt aus N mit CN einen halben Cirkel. Durch den Durchschneidungspunkt M und den gegebenen Punkt G zieht man die Linie MT, so ist diese die Tangente.

Soll MT eine Tangente seyn, so muß sie mit den Radius CM einen rechten Winkel machen,
nun ist der Winkel bey M angulus ad peripheriam
CG ist der Durchmesser

F. der Winkel bey M = recto.

§. 90.

Ist MT die Tangente, so ist PT die Subtangente, CM die Normallinie und CP die Subnormallinie.

II. Die Differentialrechnung.

§. 91.

Die Differentialrechnung giebt die Regeln an die Hand, wie man aus einer endlichen Größe eine unendlich kleine finden solle, welche unendlich mahl genommen jener gegebenen endlichen Größe gleich sey.

§. 92.

§. 92.

Unter dem Differential einer Größe versteht man den unendlich kleinen Theil, um welchen eine endliche Größe wächst oder abnimmt. Folglich findet auch nur bey veränderlichen Größen ein Differential statt, bey beständigen oder unveränderlichen Größen ist es = o oder eigentlich zu reden, es läßt sich bey diesen gar kein Differential denken.

§. 93.

Der Buchstabe d ist gewöhnlich das Zeichen, welches man dem Differential einer Größe vorsetzt.

§. 94.

Größen, die durch das Zeichen der Addition oder Subtraction miteinander verbunden sind, werden differentiiret, wenn man ihnen bloß den Buchstaben d vorsetzt. Man muß aber darauf sehen, ob die Größen wachsen oder abnehmen; im letztern Falle werden die Zeichen umgekehrt. So ist z. B.

$$d.\ x + z = dx + dz$$

$$d.\ x + a = dx. \quad §.\ 92.$$

$$d.\ x - y = dx - dy$$

$$-d.\ x - y = -dx + dy$$

§. 95.

Ein Factum aus zween Factoren kann man sich als ein Rectangel vorstellen, an welchen der eine Factor die Länge, der andre die Breite bezeichnet. Man setze CD = x, BC = y. Wächst nun CD um den unendlich kleinen Theil CH, so ist CH das Differential von x, also = dx (F. 25.)

Wächst

Wächst BC um den unendlich kleinen Theil CF, so ist CF das Differential von y, also = dy

Dann aber ist EG. IG = AEGI um einen unendlich kleinen Raum größer, als ABCD. Dieser unendlich kleine Raum, um welchen ABCD zugenommen hat, besteht

1) aus dem Rectangel CD. CF
2) aus dem Rectangel BC. CH, und
3) aus dem Rectangel CF. CH.

Es ist aber das Rectangel CD. CF = xdy
BC. CH = ydx

F. CD. CF + BC. CH = xdy + ydx

Und weil

CD. CF } das Differential von ABCD } Länge
BC. CH } nach der Ausdehnung in die } Breite

so ist überhaupt CD. CF + BC. CH,
oder xdy + ydx das Differential von ABCD
ABCD = CD. BC = xy

F. xdy + ydx = dem Differential von xy

§. 96.

Es fehlt aber eigentlich noch das Rectangel CFGH = CH. CF = dxdy. Da aber
dx ein unendlich kleiner Theil von x,
und dy ein unendlich kleiner Theil von y;
dx aber und dy für sich schon unendlich kleine Brüche sind, so wird (wie denn dis der Fall bey Brüchen ist) das durch die Multiplication entstehende Product noch unendlich mahl kleiner, als jeder der Factoren an sich schon ist, und folglich ist dxdy in Ansehung xdy + ydx = 0.

§. 97.

Hieraus läßt sich nun folgende Regel abstrahiren, wonach man sich richtet, wenn man ein Produkt, das aus zween Factoren besteht, differentiiren soll. Man multipliciret das Differential eines jeden Factors in den andern Factor, und verbindet die erhaltenen einzelnen Facta durch das Zeichen der Addition mit einander. Es ist daher z. B.

$d. xy = xdy + ydx$, und $d. xz = zdx + xdz$

§. 98.

Weil man ein Product, welches aus mehrern Factoren besteht, doch betrachten kann, als bestünde es nur aus zwey Factoren, so verfährt man mit solchen Producten nach eben der Regel. So ist z. B. $d. axy = axdy + aydx + xyda$. Weil aber a, welches eine unveränderliche Größe vorstellen soll, kein Differential hat, so ist auf die Art $da = 0$, folglich auch $xyda = 0$

F. $d. axy = axdy + aydx$.

So auch $d. ax + ay = adx + ady$.

und $d. ax - x^2 = adx - xdx - xdx$
$= adx - 2xdx$.

§. 99.

Einen Quotienten oder Bruch differentiiret man folgendergestalt. Man zieht vom Producte aus dem Differential des Zehlers in den Nenner das Product aus dem Zehler in das Differential des Nenners ab, und dividiret den Unterschied durchs Quadrat des Nenners. So ist z. B.

$$d. \frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Man

Man setze nur $\frac{x}{y} = s$

so ist $x = sy$

F. $dx = sdy + yds$ §. 97.

und $dx - sdy = yds$

F. $\frac{dx}{y} - \frac{sdy}{y} = ds$

$s = \frac{x}{y}$

F. $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = d.\frac{x}{y}$

$\frac{dx}{y} = \frac{ydx}{y^2}$

F. $\frac{ydx - xdy}{y^2} = d.\frac{x}{y}$

Eben so ist $d.\frac{a}{x} = \frac{-adx}{x^2}$

und $d.\frac{xy}{a} = \frac{axdy + aydx}{a^2}$. Denn wenn a eine beständige Größe bezeichnet, so ist im vorigen Fall xda, in diesem aber $-xyda = 0$.

Ferner ist

$$d.\frac{vx}{yz} = \frac{(vyzdx + xyzdv) - (vxydz + vxzdy)}{y^2z^2}$$

Denn wenn

$\frac{vx}{yz} = \frac{m}{n}$ gesetzt wird,

so ist $d. \frac{vx}{yz} = d. \frac{m}{n}$

$d. \frac{m}{n} = \frac{ndm - mdn}{n^2}$ Man setze vx statt m / yz — n

so ist $d. \frac{vx}{yz} = \frac{yz d.\ vx - vx d.\ yz}{y^2 z^2}$

$d.\ vx = vdx + xdv.$

$d.\ yz = ydz + zdy$

$$\text{F. } d. \frac{vx}{yz} = \frac{(yz(vdx + xdv)) - (vx(ydz + zdy))}{y^2 z^2}$$

$$= \frac{(vyzdx + xyzdv) - (vxydz + vxzdy)}{y^2 z^2}.$$

§. 100.

Irrationalgrößen differentiiret man folgendergestalt. Man schaft das Wurzelzeichen weg, multiplicirt dann das Differential der veränderlichen Größe in das Product aus dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Größe in die veränderliche Größe selbst, wenn vorher der Exponent der Dignität derselben um 1 vermindert worden. Es besteht also das Differential einer solchen Größe aus drey Factoren.

1) Aus dem Exponenten der Dignität der veränderlichen Größe.

2) Aus der veränderlichen Größe selbst mit um 1 verminderten Exponenten der Dignität.

3) Aus dem Differential der veränderlichen Größe.

§. 101.

Man soll $\sqrt{y}$ differentiiren.

Weil

Weil $\sqrt{y} = \sqrt[2]{y^1} = y^{\frac{1}{2}}$

so ist $d.\ \sqrt{y} = d.\ y^{\frac{1}{2}}$

$d.\ y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, y^{\frac{1}{2}-1} dy = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} dy$

F. $d.\ \sqrt{y} = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} dy.$

§. 102.

Das Differential von $\sqrt{y}$ ist aber auch $= \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

Denn setzt man $\sqrt{y} = m$

so ist $y = m^2$

und $dy = 2m\,dm$

F. $\frac{dy}{2m} = dm.$ Man setze $m = \sqrt{y}$

so ist $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = d.\ \sqrt{y}.$

Nun war $d.\ \sqrt{y} = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} dy$ §. 101.

Folglich muß $\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} dy$ seyn, u. so ists a.

denn

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{1\,dy}{2y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{2y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{2y^{\frac{2}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} dy}{2} = \frac{y^{-\frac{1}{2}} dy}{2}$$

§. 103.

Soll man $\sqrt[m]{y^n}$ differentiiren,

so ist $d.\ \sqrt[m]{y^n} = d.\ y^{\frac{n}{m}}$

$$d.\, y^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} y^{\frac{n}{m} - 1} dy$$

$$= \frac{n}{m} y^{\frac{n}{m} - \frac{m}{m}} dy$$

$$= \frac{n}{m} y^{\frac{n-m}{m}} dy$$

$$\text{F.}\; d.\, \sqrt[m]{y^n} = \frac{n}{m} y^{\frac{n-m}{m}} dy.$$

§. 104.

Soll $\sqrt{(ax - x^2)}$ differentiiret werden, so setze man $\sqrt{(ax - x^2)} = v$.

Dann ist $ax - x^2 = v^2$

und $adx - 2xdx = 2vdv$.

und $\frac{adx - 2xdx}{2v} = dv$.

$v = \sqrt{(ax - x^2)}$

$$\text{F.}\; \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - x^2)}} = d.\, \sqrt{(ax - x^2)}$$

§. 105.

Auf gleiche Art werden folgende Brüche differentiiret.

Man habe z. B. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ zu differentiiren.

Weil

Weil $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{2}}} = x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$

so ist $d.\ \frac{1}{\sqrt{x}} = d.\ x^{-\frac{1}{2}}$

$$d.\ x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx$$

F. $d.\ \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx.$

§. 106.

Es soll $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$ differentiiret werden.

Weil $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} = \frac{x^1}{x^{\frac{n}{m}}x^1} = \frac{x^1}{x^{\frac{n}{m}+1}} = x^{1-\frac{n}{m}-1} = x^{-\frac{n}{m}}$

so ist $d.\ \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = d.\ x^{-\frac{n}{m}}$

$$d.\ x^{-\frac{n}{m}} = -\frac{n}{m}x^{-\frac{n}{m}-1}dx$$

$$= -\frac{n}{m}x^{-\frac{n-m}{m}}dx$$

F. $d.\ \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = -\frac{n}{m}x^{-\frac{n-m}{m}}dx.$

§. 107.

Auf gleiche Art ist $d.\frac{1}{x^2} = -2x^{-3}\,dx$

Denn $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$F.\ d.\frac{1}{x^2} - d.x^{-2} = -2x^{-2-1}\,dx = -2x^{-3}\,dx.$$

§. 108.

Das Differential von $\frac{1}{x^m}$ ist $= -mx^{-m-1}\,dx$

Denn weil $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$

so ist $d.\frac{1}{x^m} = d.x^{-m}$

$$d.x^{-m} = -mx^{-m-1}\,dx$$

$$F.\ d.\frac{1}{x^m} = -mx^{-m-1}\,dx.$$

§. 109.

Wenn (F. 21.) die beyden halben Ordinaten MP und mp einander unendlich nahe, so ist der Unterschied Pp der beiden Abscissen AP und Ap das Differential der Abscisse Pp = MN. Weil aber mp unendlich nahe an MP, so ist mN unendlich klein und folglich das Differential der halben Ordinate MP. Es ist also MN = dx und mN = dy. Weil ferner Mm unendlich klein, so kann es als eine gerade Linie betrachtet werden.

Nun sind bey N und P rechte Winkel, auch ist der Winkel MmN = PMT.

F. △ MmN ∽ △ MPT.

F. mN : MN = MP : PT.

oder dy : dx = y : PT.

$$\text{F. } PT = \frac{ydx}{dy}$$

PT ist die Subtangente.

Folglich ist die Subtangente für alle krumme Linien $= \frac{ydx}{dy}$, oder die Subtangente ist die vierte Proportionallinie zum Differential der halben Ordinate, zum Differential der Abscisse und zur halben Ordinate.

§. 110.

Nun läßt sich auch die Subnormallinie OP überhaupt bestimmen.

Weil △ MPT ∽ △ MOP

so ist PT : MP = MP : OP.

$$\text{oder } \frac{ydx}{dy} : y = y : OP.$$

$$\text{F. } OP = y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 . \frac{dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}$$

F. dx : dy = y : OP.

Es ist also die Subnormallinie die vierte Proportionallinie zum Differential der Abscisse zum Differential der halben Ordinate und zur halben Ordinate.

§. 111.

Sucht man nun aus der Gleichung für jede krumme Linie insbesondre einen Werth für dx oder dy, und substituirt denselben in der allgemeinen Formel für PT und für OP, so erhält man statt der allgemeinen Formel für die Subtangente den Werth der Subtangente derjenigen krummen Linie, aus deren Gleichung man den Werth für dx oder dy in der Formel $\frac{ydx}{dy}$ gesetzt hat; und statt der allgemeinen Formel für die Subnormallinie erhält man den besondern Werth der Subnormallinie derjenigen krummen Linie, aus deren Gleichung man einen Werth für dx oder dy hergeleitet und ihn in der allgemeinen Formel $\frac{ydy}{dx}$ anstatt dx oder dy gesetzt hat.

§. 112.

Man soll die Subtangente am Cirkel bestimmen.

Weil im Cirkel $y^2 = ax - x^2$

$$\text{so ist } 2ydy = adx - 2xdx$$

$$\text{und } \frac{2ydy}{a-2x} = dx$$

$$\text{F. } \frac{ydy}{dy} = \frac{y}{dy} \cdot \frac{2ydy}{a-2x}$$

$$= \frac{2y^2}{a-2x}$$

$$y^2 = ax - x^2$$

$$\text{F.}\ \frac{ydx}{dy} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$$

$$= \frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x} = \text{der Subtang. am Cirkel.}$$

§. 113.

Will man die Subtangente an der Parabel bestimmen, so nehme man die Gleichung der Parabel

$y^2 = ax$, und differentiire dieselbe,

so ist $2ydy = adx$

und $\frac{2ydy}{a} = dx$

$$\text{F.}\ \frac{ydx}{dy} = \frac{y}{dy} \cdot \frac{2ydy}{a}$$

$= \frac{2y^2}{a}$, weil aber $y^2 = ax$

so ist $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ax}{a} = 2x$ = der Subtangente an der Parabel.

§. 114.

Eben so erhält man die Subtangente an der Ellipse, wenn man

$ay^2 = abx - bx^2$ differentiiret

dann ist $2aydy = abdx - 2bxdx$

$abdx - 2bxdx = dx\,(ab - 2bx)$

$$\text{F.}\ \frac{2aydy}{ab - 2bx} = dx$$

$$\text{F. } \frac{ydx}{dy} = \frac{y}{dy} \cdot \frac{2aydy}{ab - 2bx}$$

$$= \frac{2ay^2}{ab - 2bx}$$

$$ay^2 = abx - bx^2$$

$$\text{F. } \frac{ydx}{dy} = \frac{2abx - 2bx^2}{ab - 2bx}$$

$$= \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$$ = der Subtang. an der Ellipse.

§. 115.

Die Subtangente an der Hyperbel zu bestimmen.

Weil $ay^2 = abx + bx^2$

so ist $2aydy = (ab + 2bx)\,dx$

$$\text{F. } \frac{2aydy}{ab + 2bx} = dx$$

$$\text{F. } \frac{ydx}{dy} = \frac{2ax + 2x^2}{a + 2x}$$ = der Subtang. an der Hyperbel.

§. 116.

Der Werth der Subnormallinie am Cirkel wird bestimmt, wenn man $y^2 = ax - x^2$ differentiiret.

Dann ist $2ydy = adx - 2xdx$

und $dy = \frac{(a - 2x)\,dx}{2y}$

$$\text{F. } \frac{ydy}{dx} = \frac{y}{dx} \cdot \frac{(a - 2x)\,dx}{2y}$$

$$= \frac{a}{2} - x =$$ der Subnormallinie am Cirkel.

§. 117.

§. 117.

Hieraus läßt sich nun auch der Werth für die Normallinie am Cirkel finden. (Fig. 27.)

Denn weil $CM^2 = MP^2 + CP^2$

$$= y^2 + (AC - AP)^2$$

$$= y^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

$$= y^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2$$

$$y^2 = ax - x^2$$

$$\text{F. } CM^2 = ax - x^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2$$

$$= \frac{a^2}{4}$$

$$\text{F. } CM = \frac{a}{2}.$$

§. 118.

Und weil $AT = PT - AP$

$$PT = \frac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x}$$

---

so ist $AT = \dfrac{ax - x^2}{\frac{a}{2} - x} - x$

$$= \frac{ax - x^2 - \frac{ax}{2} + x^2}{\frac{a}{2} - x}$$

=

$$= \frac{ax}{2} \cdot \frac{2}{a - 2x} = \frac{ax}{a - 2x}$$

§. 119.

Die Subnormallinie an der Parabel zu bestimmen.

Weil $y^2 = ax$

so ist $2ydy = adx$

und $dy = \frac{adx}{2y}$

$$\text{F. } \frac{ydy}{dx} = \frac{y}{dx} \cdot \frac{adx}{2y} = \frac{a}{2}$$ = der Subnorm. an der Parabel.

§. 120.

Eben so findet man den Werth der Subnormallinie an der Ellipse,
wenn man $ay^2 = abx - bx^2$ differentiiret.

Dann ist $2aydy = abdx - 2bxdx$

und $dy = \frac{(ab - 2bx)dx}{2ay}$

$$\text{F. } \frac{ydy}{dx} = \frac{y}{dx} \cdot \frac{(ab - 2bx)dx}{2ay}$$

$$= \frac{ab - 2bx}{2a}$$ = d. Subnorm. an der Ellipse.

§. 121.

Die Subnormallinie an der Hyperbel ist $= \frac{ab + 2bx}{2a}$.

III. Vom Größten und Kleinsten.

§. 122.

Die Lehre vom Größten und Kleinsten beschäftigt sich zunächst mit Bestimmung des Werths in unveränderlichen Größen derjenigen Abscisse, welcher die größte oder kleinste Applicate zukommt.

§. 123.

In einigen krummen Linien wachsen nemlich die halben Ordinaten mit den Abscissen immer fort, daß sich also an ihnen keine größte halbe Ordinate denken läßt. In andern aber hören die halben Ordinaten in einem gewissen Punkte der Abscissenlinie auf zu wachsen, obgleich die Abscissen immer noch zunehmen. Wo nun die halbe Ordinate zu wachsen aufhöret, da ist sie am größten. So auch, wenn bey einigen krummen Linien die halben Ordinaten immer abnehmen, ohnerachtet die Abscissen noch fortwachsen, bis auch jene wieder anfangen zuzunehmen, so sind sie da am kleinsten, wo sie abzunehmen aufhören.

§. 124.

Es sey (F. 23.) PQ die Axe der krummen Linie Axm, mp sey die kleinste halbe Ordinate, so ist mt die Tangente im Punkte m; weil nun x = recto; so ist mt ♯ PQ, die Subtangente aber in Ansehung der Applicate = ∞. Je mehr sich m dem Punkte A nähert, desto kleiner wird der Winkel x, endlich aber wird dieser Winkel x = o oder verschwindet, wenn der Punkt m in den Punkt A fällt, dann fällt aber auch die Tangente in die Applicate AB und steht

folg-

folglich auf der Axe PQ perpendiculär. Ist aber der Winkel x = o, so wird auch die Subtangente in diesem Falle = o.

Wird also die Subtangente unendlich, so ist die Tangente ‡‡ der Axe und gehört zur kleinsten Applicate. Wird aber die Subtangente = o, so steht die Tangente auf der Axe perpendiculär und gehört zur größten Applicate.

§. 125.

Es sey ferner NT die Axe der krummen Linie $A\mu M$, MP sey die größte Applicate, dann ist RT die Tangente am Punkte M und der Winkel y = recto, folglich die Tangente RT ‡‡ der Axe NT, folglich die Subtangente = ∞. Je näher nun der Punkt M dem Punkte A kommt, desto kleiner wird der Winkel y. Fällt endlich der Punkt M in A, so wird der Winkel y = o, die Tangente deckt dann die Applicate $A\beta$ und steht auf der Axe NT perpendiculär; weil aber der Winkel y = o, so wird auch die Subtangente = o.

Wird also die Subtangente hier = ∞, so ist gleichfalls die Tangente ‡‡ der Axe, gehört aber zur größten Applicate; wird die Subtangente aber = o, so steht die Tangente auf der Axe perpendiculär und gehört zur kleinsten Applicate.

§. 126.

Die größte oder kleinste Applicate findet sich also: Theils da, wo die Subtangente unendlich groß ist. Die Formel aber für die Subtangente ist $\frac{ydx}{dy}$ §. 109. Dieser Werth muß folglich auch dann unendlich groß seyn.

Soll

Soll aber $\frac{ydx}{dy}$ unendlich groß seyn, so muß der Nenner im Zehler unendlich mahl enthalten seyn, d. i. der Nenner muß zum Zähler kein Verhältniß haben, folglich ist in diesem Fall $dy = 0$.

Theils da, wo die Subtangente $= 0$ oder unendlich klein wird. Es muß also auch der Werth der Subtangente oder $\frac{ydx}{dy} = 0$ seyn. Soll aber $\frac{ydx}{dy} = 0$ werden, so muß $dy = \infty$ seyn, oder der Zehler muß im Nenner unendlich mahl enthalten seyn und folglich zum Nenner kein Verhältniß haben.

§. 127.

Hieraus fließen nun zu Bestimmung der größten oder kleinsten Applicate folgende Regeln.

Man differentiiret die Gleichung der krummen Linie und reducirt sie auf dy. Weil aber $dy = 0$, so wird auch der Werth von $dy = 0$, Dann leitet man aus dieser auf Null reducirten Gleichung einen Werth her für x, so erhält man dadurch einen Werth für diejenige Absciße, welche der größten oder kleinsten halben Ordinate zukömmt. Weil aber auch $dy = \infty$, so setzt man den Werth von $dy = \infty$ und verfährt wie vorhin, so bekommt man gleichfalls mit x den Werth derjenigen Absciße, welche der größten oder kleinsten Applicate zugehört.

Findet sich aber bey Anwendung dieser Regeln kein Werth für x, man mag $dy = 0$ oder $= \infty$ setzen, so ist dis ein Kennzeichen, daß sich an der krummen Linie keine größte Applicate findet.

§. 128.

Man soll den Ort für die größte Applicate im Cirkel bestimmen.

Im Cirkel ist $y^2 = ax - x^2$

$$\text{F. } 2ydy = adx - 2xdx.$$

Man setze $dy = 0$

$$\text{so ist } 0 = adx - 2xdx$$
$$= (a - 2x)\, dx$$

$dx :)$

$$\text{und } 0 = a - 2x$$

$$\text{und } 2x = a$$

$$\text{F. } x = \frac{a}{2}$$

Die größte halbe Ordinate findet sich also in der Mitte des Durchmessers, oder wo die Abscisse gleich dem halben Durchmesser.

§. 129.

Den Ort für die größte Applicate in der Ellipse zu bestimmen.

Weil $ay^2 = abx - bx^2$

$$\text{so ist } 2aydy = abdx - 2bxdx$$

Setzt man $dy = 0$

$$\text{so ist } 0 = (ab - 2bx)\, dx$$

$$\text{und } 0 = ab - 2bx$$

$b :)$

$$\text{und } 0 = a - 2x$$

$$\text{F. } 2x = a$$

$$\text{und } x = \frac{a}{2}$$

Es ist also auch hier die der größten halben Ordinate correspondirende Abscisse = der halben großen Axe.

§. 130.

Hat die Parabel eine größte Applicate, und wenn sie eine hat, wo ist der Ort derselben?

Weil $ax = y^2$

so ist $adx = 2ydy$

Setzt man $dy = o$

so ist $adx = o$

$dx)$ ——————

$\mathfrak{F}.\ a = o$

An einer Parabel also, deren Parameter = o, würde es eine solche größte halbe Ordinate geben, an andern Parabeln aber, deren Parameter einen bestimmten Werth haben, giebt es keine solche größte Applicate; da nun aber bey keiner Parabel der Parameter = o seyn kann, so findet auch bey keiner Parabel eine größte Applicate statt, folglich ist auch keine Abscisse, die jener ihren Ort auf der Abscissenlinie bestimmte. Die Parabel entfernt sich also je länger, je mehr von der Axe. Mehrern Unterricht von dieser Methode, die größten und kleinsten Applicaten zu bestimmen, findet man in des Herrn Maj. Tempelhofs Analysis des Unendlichen.

§. 131.

Man darf aber nicht glauben, als hab' es die Methode vom Größten und Kleinsten bloß mit der Bestimmung der größten und kleinsten Applicate zu thun. Man bedient sich derselben auch bey Auflösung

andrer Aufgaben, insbesondre auch in der Mechanik zu Bestimmung der größten Würkung, und wie deshalb einzelne Theile einer Maschine einzurichten, damit die größte Wirkung erfolge; und in andern Fällen. Hieher gehört unter andern folgende Aufgabe.

§. 132.

Wie muß eine gerade Linie getheilt werden, damit das mit beyden Theilen construirte Rectangel den möglichst größten Raum einschließe?

Man setze die ganze Linie $= a$, den einen Theil $= x$, so ist der andre Theil $= a - x$.

Folglich das Rectangel aus beyden Theilen $= x.(a - x) = ax - x^2$.

Setzt man $ax - x^2 = y^2$, so ist dis die Gleichung, die den Cirkel erklärt. Nun gehört im Cirkel die größte halbe Ordinate zur Abscisse = dem halben Durchmesser; die größte halbe Ordinate aber im Cirkel ist ebenfalls gleich dem halben Durchmesser, folglich wenn der eine Theil $x = \frac{a}{2}$, so ist auch der andre Theil oder $a - x = \frac{a}{2}$.

Es sey $a = 16$, so ist $x = \frac{a}{2} = \frac{16}{2} = 8$ und $a - x = 16 - 8 = 8$ $\Big\} = 64$.

Bey jeder andern Theilung ist das Product beyder Theile < 64.

Denn wenn $x =$ „ „ 7, so ist $a - x = 16 - 7 = 9$ $\Big\} = 63$.
oder wenn $x =$ „ „ 4, so ist $a - x = 16 - 4 = 12$ $\Big\} = 48$.

oder

oder wenn $x = \quad , \quad , \quad 3\frac{1}{2}$
so ist $a - x = 16 - 3\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ $\Big\} 43\frac{3}{4}$

Je kleiner also der eine Theil in Ansehung des andern ist, desto kleiner ist auch das Rectangel aus beyden Theilen.

§. 133.

Ich will noch eine Aufgabe aus des H. Prof. Mönnichs Anleitung zur Anordnung ꝛc. der Maschinen auf der 158sten Seite hersetzen.

Was muß die Geschwindigkeit der Schaufeln bey einem unterschlächtigen Wasserrade für ein Verhältniß gegen die Geschwindigkeit des Anschlagewassers haben, damit der Maschine das größte Bewegungsmoment ertheilt und also der möglich größte Effect hervorgebracht werde?

Man findet dis, wenn man das Quadrat der relativen Geschwindigkeit des Anschlagewassers in die Geschwindigkeit der zu bewegenden Fläche multiplicirt, das Differential dieses Products = o setzt, und daraus einen Werth für die Geschwindigkeit der Schaufeln herleitet.

Es sey zu dem Ende

die zu suchende Geschwindigkeit der Schaufeln $= c$
die Geschwindigkeit des Anschlagewassers , $= C$
so ist die relative Geschwindigkeit des Wassers $= C - c$.

Man setze also

$d.\ (C - c)^2.\ c = o.$

$(C - c)^2 = C^2 - 2Cc + c^2$

und $(C - c)^2.\ c = C^2c - 2Cc^2 + c^3.$

$F.\ d.\ C^2c - 2Cc^2 + c^3 = o.$

$d.\ C^2c = C^2dc$ (denn C als beständige Größe hat kein Differential)

 d.

$d.\ 2Cc^2 = 4Ccdc.$

$d.\ c^3 = 3c^2dc.$

F. $C^2dc - 4Ccdc + 3c^2dc = 0.$

F. $C^2 - 4Cc + 3c^2 = 0.$

und $3c^2 - 4Cc = -C^2.$

3:)

$c^2 - \frac{4}{3}Cc = -\frac{1}{3}C^2$ (man ergänze das fehlende Glied)

so ist $c^2 - \frac{4}{3}Cc + \frac{4}{9}C^2 = \frac{4}{9}C^2 - \frac{1}{3}C^2 = \frac{1}{9}C^2.$

und $c - \frac{2}{3}C = \pm \frac{1}{3}C$

F. $c = \frac{2}{3}C \pm \frac{1}{3}C.$

Wollte man hier den positiven Werth nehmen, so wäre $c = \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}C = C$, dann aber wäre die relative Geschwindigkeit des Anschlagewassers $= C - C = 0$, welches aber auf keinen Fall statt finden kan. Folglich gilt nur der negative Werth, und dann ist $c = \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}C.$

Wie nun jener Werth ein Minimum giebt, so erhält man mit diesem letztern ein Maximum. Es müssen also die Theile einer Maschine mit einem unterschlächtigen Wasserrade so eingerichtet werden, daß die Geschwindigkeit der Schaufeln gleich sey $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Anschlagewassers.

IV. Die Integralrechnung.

§. 134.

Stellet man aus einem Differential diejenige Größe wieder her, durch deren Differentiirung das Differential entstanden ist, so erhält man mit derselben das Integral.

§. 135.

Weil man nun das Differential einer endlichen Größe unendlich mahl nehmen muß, um die endliche Größe zu erhalten, so ist integriren und summiren einerley; daher pflegt man auch vor diejenige Differentialformel, die integrirt werden soll, ein S zu setzen.

§. 136.

So wie nun

1) $d.x+z = dx+dz$ war §. 94. so muß $S.dx+dz = x+z$ seyn.

2) $d.xy = xdy+ydx$ — §. 97. — $S.xdy+ydx = xy$ —

3) $d.\frac{x}{y} = \frac{ydx-xdy}{y^2}$ — §. 99. — $S.\frac{ydx-xdy}{y^2} = \frac{x}{y}$ —

4) $d.\sqrt[m]{y^n} = \frac{n}{m} y^{\frac{n-m}{m}} dy$ — §. 103. — $S.\frac{n}{m} y^{\frac{n-m}{m}} dy = \sqrt[m]{y^n}$ —

5) $d.\frac{1}{x^m} = -mx^{-m-1} dx$ — §. 108. — $S.-mx^{-m-1} dx = \frac{1}{x^m}$ —

§. 137.

Hieraus lassen sich nun die Regeln abstrahiren vorkommende Differentialformeln zu integriren, und zwar für den **ersten** Fall, wenn die Glieder einer Differentialformel durch + oder — mit einander verbunden sind. In diesem Fall verbindet man die veränderlichen Größen durch diese Zeichen, so hat man die Formel integrirt.

Daß z. B. $S. dx = x$ ist leicht zu begreifen; denn wenn ich das Differential von x unendlich mahl nehmen muß, um die endliche Größe zu erhalten, so muß ich ja, wenn ich dis thue, die Größe x selbst bekommen.

§. 138.

Hat man das Differential eines Products, wie im zweyten Falle, so bekommt man das Integral, wenn man die veränderliche Größe aus jedem besondern Factum der Differentialformel nimmt und sie in einander multipliciret.

§. 139.

Ist das Differential aus einem Quotienten oder Bruch entstanden, dergleichen Formel der dritte Fall enthält, so bekommt man das Integral, wenn man die veränderliche Größe desjenigen Factums, wovor das Zeichen — steht, durch die veränderliche Größe des erstern Factums oder auch durch die Wurzel des Nenners dividiret.

§. 140.

Der vierte und fünfte Fall werden auf einerley Art behandelt. Man vermehrt nemlich den Exponenten der veränderlichen Größe in der Differentialformel um 1, und dividiret dann diese neue Formel durch das Product aus dem Differential der veränderlichen Größe in den um 1 vermehrten Exponenten der veränderlichen Größe.

I. Anwendung der Integralrechnung auf die Bestimmung des Flächeninhalts.

§. 141.

Zieht man (F. 21.) die halben Ordinaten MP und mp unendlich nahe an einander, so erhält man das unendlich

endlich kleine Trapez MmPp. Zöge man ferner von P bis A dergleichen unendlich nahe liegende halbe Ordinaten, so würde dadurch der Raum AMP in lauter unendlich kleine Trapeze getheilt. Nimmt man nun diese unendlich vielen Trapeze zusammen, so muß ihre Summe dem Raum AMP gleich seyn. Man kann sich also das Trapez MmPp als das Differential oder Element der Fläche vorstellen. Sucht man nun den Inhalt desselben und integrirt ihn, so hat man den Inhalt des Raums gefunden, oder man hat die krumme Linie **quadrirt**.

§. 142.

Das Trapez MmPp ist $=$ rectang. MNPp $+ \triangle$ MmN.

$$\triangle MmN = \frac{MN \cdot mN}{2}$$

mN ist unendl. klein ex hyp. folgl. $= 0$.

F. $\triangle MmN = \frac{MN \cdot 0}{2} = 0$.

F. Trapez MmPp $=$ rectang. MNPp $=$ dem Differential des Raums der krummen Linie.

Ist nun $Pp = dx$, $Mp = y$

so ist rectang. $MNPp = ydx$

$MNPp = MmPp$

F. Area trapezii $MmPp = ydx$.

Folglich der ganze Flächeninhalt der krummen Linie $=$ der Summe von allen den unendlich vielen ydx, oder Area der krummen Linie überhaupt $=$ $S.\, ydx$.

§. 143.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich überzeugen, wenn man auf diese Art den In-

Inhalt einer solchen Figur sucht, deren Inhalt auch die gemeine Geometrie finden lehret.

Man quadrire daher das △ABC (F. 24.) und vergleiche dann die Formel für seinen Inhalt mit der, die man nach geometrischen Principiis findet.

Wenn im △ ABC die Linie BC ‡‡ bc.

so ist △ ABC ∽ Abc.

und AB : BC = Ab : bc.

Setzt man nun $AB = a$, $BC = b$,

$Ab = x$, $bc = y$, $Bb = dx$

so ist $a : b = x : y$

und $y = \frac{bx}{a} = bc.$

(dx

F. $ydx = \frac{bxdx}{a}$ = dem Differenz. des △ Abc

F. $S.\,ydx = S.\,\frac{bxdx}{a}$

$$S.\,\frac{bxdx}{a} = \frac{bx^{1+1}dx}{1+1\,adx}$$

$$= \frac{bx^2dx}{2adx}$$

$$= \frac{bx^2}{2a}$$

F. $S.\,ydx = \frac{bx^2}{2a} = \frac{bx}{a}.\frac{x}{2} =$ △ Abc.

Es ist aber x ein unbestimmter Theil der Höhe; setzt man nun die ganze Höhe AB oder a statt x, so

so ist area $\triangle$ ABC $= \frac{ba^2}{2a} = \frac{ba}{2} =$ einem Product aus der Grundlinie BC $= b$ in die halbe Höhe $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; und so lehrt auch die Geometrie den Inhalt eines Dreyecks finden.

§. 144.

Eine jede Parabel vom zweyten Grade zu quadriren, in welcher $y^2 = ax$

$$\text{F. } y = \sqrt{ax}$$

$$\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{F. } y = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \quad (dx$$

$$\text{F. } ydx = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx.$$

$$\text{und S. } ydx = \text{S. } a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx.$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}dx}{\frac{1}{2}+\frac{2}{2}dx}$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}.\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x}{3}$$

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\text{F. S. } ydx = \frac{2xy}{3}$$

Der

Der Inhalt einer solchen Parabel ist also gleich einem Product aus $\frac{2}{3}$ der halben Ordinate in die correspondirende Abscisse.

§. 145.

Die Anwendung dieser Aufgabe zeigt sich unter andern beym Mühlenbau und überhaupt in der Wasserbaukunst.

Es ist zum Beyspiel gegeben der cubische Inhalt derjenigen Wassersäule, worauf man in jeder Zeitsecunde rechnen kan, und wodurch eine Mühle mit einem unterschlächtigen Wasserrade in Bewegung gesetzt werden soll, ausserdem ist noch das Gefälle bekannt. Man soll den Flächeninhalt einer Schaufel bestimmen.

Die Regel ist kurz die: Man dividire den gegebenen cubischen Inhalt der Wassersäule durch die der mittlern Geschwindigkeit, deren man sich in der Rechnung bedient, correspondirende Fallhöhe. Diese aber findet man folgendergestalt.

Es sey (F. 26.) AD die Höhe der Oefnung ABCD, durch welche das Wasser auf die Schaufeln des Mühlrades geleitet wird. Das Wasser habe so starken Zufluß, daß es immer diese Höhe behalte. Offenbar bewegen sich die Wassertheilchen unten bey D wegen des Drucks der obern am geschwindesten, oben aber bey A ist ihre Geschwindigkeit am kleinsten. Die mittlere Geschwindigkeit liegt also höher als D und tiefer als A. Es kommt nun nur darauf an, den Punkt auf der Höhenlinie AD zu bestimmen, in welchem sich das Wasser mit der mittlern Geschwindigkeit bewegt.

Man setze AD = x, DE oder die Geschwindigkeit des Wassers in D = y. Man nehme nach

Belieben einen andern Punkt etwa in P an, und setze AP = m, die Linie aber, die die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Punkte anzeigt, = n.

Weil sich die Geschwindigkeiten verhalten wie die Wurzeln aus den correspondirenden Höhen; so ist $n : y = \sqrt{m} : \sqrt{x}$.

oder $n^2 : y^2 = m : x$

F. $my^2 = n^2 x$.

F. $y^2 = \frac{n^2 x}{m}$

Diese Gleichung aber erklärt die Natur der Parabel, wenn $\frac{n^2}{m}$ der Parameter ist; es müssen also die Punkte A und E durch eine Parabel mit einander verbunden werden, dann aber ist AD die Abscissenlinie.

Nun kann aus jedem Punkte der Abscissenlinie eine halbe Ordinate gezogen werden, weil aber der Punkte unendlich viel sind, so hat man auch unendlich viel halbe Ordinaten, und zugleich eine unendliche Reihe, deren erstes Glied = o, das letzte = der halben Ordinate DE.

Jetzt kommts darauf an, diese Progreßion zu summiren, oder, welches eben das ist, diese Parabel zu quadriren. Dis geschieht nun auf die §. 144 angezeigte Art. Man sucht nemlich aus der Gleichung für die Parabel den besondern Werth für S. ydx, oder von der Summe aller Elemente der Parabel.

Es war aber für die Parabel S. ydx = $\frac{2}{3}$ xy §. 144 d. i. man multipliciret die Abscissenlinie in $\frac{2}{3}$ der halben Ordinate DE, so ist das Product Area parabolae und zugleich die Summe aller halben Ordinaten.

Weil

Weil man sich aber unter deu halben Ordinaten die Geschwindigkeiten nach Verschiedenheit der Höhen vorstellen kan; so hat man folglich auch die Summe aller möglichen Geschwindigkeiten von der kleinsten in A an, bis zu der größten in D.

Um endlich die mittlere Geschwindigkeit zu erhalten, stelle man sich $\frac{2}{3}xy$ als das Product der beyden mittlern Geschwindigkeiten vor, welchen das Product der beyden äussern gleich ist. Die mittlere Geschwindigkeit aber multiplicirt in die Anzahl aller Geschwindigkeiten ist gleich einem Producte, welches der Summe aller Geschwindigkeiten gleich ist. Die Anzahl aller Geschwindigkeiten bezeichnet die Linie $AD = x$, folglich ist die mittlere Geschwindigkeit $= \frac{2}{3}y$. Ist aber $y = DE$, so ist $\frac{2}{3}y = \frac{2}{3}DE$.

Es ist aber

$DE : \frac{2}{3}DE = \sqrt{AD} : \sqrt{}$ aus der zu suchend. Fallhöhe
od. $DE^2 : \frac{4}{9}DE^2 = AD$: zur zu suchenden Fallhöhe
oder $1 : \frac{4}{9} = AD$: zur zu suchenden Fallhöhe.

Folglich die Fallhöhe, die der mittlern Geschwindigkeit zukommt, $= \frac{4}{9}AD$ von A an gerechnet.

§. 146.

Den Cirkel zu quadriren verfährt man also. (F. 27.)

Man setze $AC = r$, $CP = x$, $MP = y$; so ist, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet werden, die Gleichung für den Cirkel

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$\text{und } y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

Man ziehe die Wurzel wirklich aus, und setze

$$r^2 = P, \; -\frac{x^2}{r^2} = Q, \; m = 1, \; n = 2.$$

so

so ist $P^{\frac{m}{n}} = r^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \quad , \quad , \; r = A.$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2}. r. \frac{-x^2}{r^2} = \; , \; \frac{-x^2}{2r} = B.$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4}. \frac{-x^2}{2r}. \frac{-x^2}{r^2} = -\frac{x^4}{8r^3} = C.$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{1}{2}. \frac{-x^4}{8r^3}. \frac{-x^2}{r^2} = -\frac{x^6}{16r^5} = D.$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8}. \frac{-x^6}{16r^5}. \frac{-x^2}{r^2} = -\frac{5x^8}{128r^7} = E.$

$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10}. \frac{-5x^8}{128r^7}. \frac{-x^2}{r^2} = -\frac{7x^{10}}{256r^9} = F.$ u. s. w.

F. $y = r - \frac{x^2}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^6}{16r^5} - \frac{5x^8}{128r^7} - \frac{7x^{10}}{256r^9} \ldots$

F. $ydx = rdx - \frac{x^2dx}{2r} - \frac{x^4dx}{8r^3} - \frac{x^6dx}{16r^5} - \frac{5x^8dx}{128r^7} - \frac{7x^{10}dx}{256r^9}.$

F. $S. ydx = rx - \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{4r^3} - \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7} - \frac{7x^{11}}{2816r^9}$

u. s. w. = dem Raum CHMP.

Wird aber die Abscisse = dem halben Durchmesser oder $x = r$;

so ist $r^2 - \frac{r^2}{6} - \frac{r^2}{40} - \frac{r^2}{112} - \frac{5r^2}{1152} - \frac{7r^2}{2816}$ u. s. w.

oder $r^2 (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ u. s. w.) = dem Inhalt des Quadranten ACH; Multiplicirt man aber diese Reihe in 4,

so ist $4r^2 (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ u. s. w. der Inhalt des ganzen Cirkels.

Setzt

Setzt man den halben Durchmesser oder $r = \frac{1}{2}$, so ist der Quadrant

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{160} - \frac{1}{448} - \frac{5}{4608} - \frac{7}{11264} \text{ u. s. w.}$$

und der ganze Cirkel

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \text{ u. s. w.}$$

§. 147.

Man soll die Ellipse quadriren. (F. 14.)

Wenn die halbe große Axe $AC = a$, die halbe kleine Axe $CD = c$, die Abscisse $CP = x$ von C angerechnet, die halbe Ordinate $MP = y$,

so ist $AP = AC - CP = a - x$

$BP = BC + CP = a + x$

F. $AP.\,BP = (a - x)(a + x) = a^2 - x^2$.

Nun ist in der Ellipse

$AP.\,BP : AC^2 = MP^2 : CD^2$. §. 77.

oder $a^2 - x^2 : a^2 = y^2 : c^2$.

F. $a^2 y^2 = c^2 (a^2 - x^2)$

F. $ay = c\sqrt{(a^2 - x^2)}$

und $y = \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$

Weil aber

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ u. s. w. §. 146.}$$

$$\text{so ist } y = \frac{c}{a}\left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} \text{ u. s. w.}\right)$$

$$= c - \frac{cx^2}{2a^2} - \frac{cx^4}{8a^4} - \frac{cx^6}{16a^6} - \frac{5cx^8}{128a^8} - \frac{7cx^{10}}{256a^{10}} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{F. } ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}} \text{ etc.}$$

F.

$$F.S.ydx = cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}} \text{ u. s. w.}$$
= dem Raum CDMP.

Wird aber die Abscisse = der halben großen Axe oder x = a; so ist

$$ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} - \frac{ac}{112} - \frac{5ac}{1152} - \frac{7ac}{2816}, \text{ u. s. w.}$$
$$\text{o. } ac\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \text{ rc.}\right)$$
= dem Inhalt des Quadranten ACD der Ellipse.

$$F. 4ac\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816} \text{ rc.}\right)$$ = dem Inhalt der ganzen Ellipse.

§. 148.

Ist aber Area Circuli $= 4r^2(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots\ldots)$ §. 146.
und Area Ellipsis $= 4ac(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \ldots\ldots)$ §. 147.

so ist AreaCirc : AreaEll. $= 4r^2(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}..) : 4ac(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}..)$
$= 4r^2 : 4ac = r^2 : ac.$

Soll daher der Cirkel einer Ellipse gleich seyn, so muß $r^2 = ac$ seyn, d. i. das Quadrat des halben Durchmessers des Cirkels muß gleich seyn dem Product oder Rectangel aus der halben großen in die halbe kleine Axe.

Resolvirt man $r^2 = ac$ in eine Proportion; so ist $a : r = r : c$;
folglich ist der Inhalt einer Ellipse gleich dem Inhalt eines Cirkels, wenn der halbe Durchmesser eines Cirkels die mittlere Proportionallinie ist zwischen der halben großen und halben kleinen Axe der Ellipse.

§. 149.

Ein Kegel entsteht durch die Bewegung eines rechtwinklichten △ um einen seiner Catheten, wenigstens kann man sich die Entstehung desselben so vorstellen. Auf gleiche Art verhält sichs auch mit der

Entstehung andrer Körper, deren Grundfläche so wohl, als auch jeder mit der Grundfläche parallel gehende Schnitt ein Cirkel ist.

Man kann daher jede halbe Ordinate BC und bc (F. 24.) als den Radius derjenigen Peripherie betrachten, welche die Endpunkte C und c beschreiben, die Abscissenlinie aber bestimmt die Höhe eines solchen Körpers.

§. 150.

Bestimmt man nun den unendlich schmalen Streifen auf der Oberfläche zwischen zwey unendlich nahe liegenden Peripherien, so weiß man das Element der krummen Oberfläche eines solchen Körpers. Man findet aber den Inhalt dieses Streifens, wenn man die durch die halbe Ordinate (als den Radius) beschriebene Peripherie in Cc multipliciret.

Setzt man den Radius $BC = y$, seine Peripherie $= p$, und verhält sich allgemein der Radius zur Peripherie wie $r : c$; so findet man die mit $BC = y$ beschriebenei Peripherie, wenn man schließt:

wie $r : c = y : p$.

F. Peripherie oder $p = \frac{cy}{r}$.

Diese Peripherie nun wird in den Werth von Cc multiplicirt.

Es ist aber $Cc^2 = cd^2 + Cd^2$.

oder wenn $cd = dx$, $Cd = dy$

so ist $Cc^2 = dx^2 + dy^2$

und $Cc = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

oben war $p = \frac{cy}{r}$

F. Element der krummen Oberfläche $= \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

und $S. \frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ist folglich die allgemeine Formel für den Inhalt der krummen Oberfläche.

§. 151.

In besondern Fällen sucht man aus der Gleichung derjenigen krummen Linie, durch deren Bewegung man sich die Entstehung desjenigen Körpers, dessen krumme Oberfläche man sucht, vorstellen kann, einen Werth für dx^2 oder dy^2 und setzt ihn in der allgemeinen Formel statt dx^2 oder dy^2. Wird dann die besondre Formel integrirt, so erhält man den Inhalt der krummen Oberfläche des besondern Körpers.

§. 152.

Man sucht z. B. die krumme Oberfläche des Kegels ACE.

Setzt man die Höhe des rechtwinklichten △, das bey Entstehung eines Kegels zum Grunde liegt, $= a$, die Grundlinie desselben $= r$,

so ist $a : r = x : y$

F. $rx = ay$

und $r dx = a dy$

und $dx = \frac{a dy}{r}$

F. $dx^2 = \frac{a^2 dy^2}{r^2}$

$$\mathfrak{F}.\ \frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{cy}{r}\sqrt{\left(\frac{a^2dy^2}{r^2}+dy^2\right)}$$

$$dy^2 = \frac{r^2dy^2}{r^2}$$

$$\mathfrak{F}.\ \frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{cy}{r}\sqrt{\left(\frac{a^2dy^2+r^2dy^2}{r^2}\right)}$$

$$= \frac{cydy}{r^2}\sqrt{(a^2+r^2)}$$

$$\mathfrak{F}.\ S.\ \frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2+dy^2)} = S.\ \frac{cydy}{r^2}\sqrt{(a^2+r^2)}$$

$$= \frac{cy^2}{2r^2}\sqrt{(a^2+r^2)}$$

Ist nun $y = BC = r$, und $a = AB$,

so ist die krumme Oberfläche des Kegels $= \frac{c}{2}\sqrt{(a^2+r^2)}$

Setzt man nun statt der Zeichen a und r die Linien AB und BC, so ist $\sqrt{a^2+r^2} = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{AC^2} = AC =$ der Seite des Kegels, und dann ist die krumme Oberfläche eines Kegels gleich einem Producte aus der halben Peripherie $\left(\frac{c}{2}\right)$ in die Länge der Seitenlinie AC des Kegels $= \sqrt{a^2+r^2}$.

§. 153.

Man soll einen unbestimmten Theil der Kugelfläche berechnen.

Setzt man in der Cirkelgleichung $a = 2r$.

so ist im Cirkel $y^2 = 2rx - x^2$

und $2ydy = 2rdx - 2xdx$

oder

oder $y\,dy = r\,dx - x\,dx$

und $dy = \frac{r\,dx - x\,dx}{y}$

und $dy^2 = \frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{y^2}$

$= \frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}.$

F. $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$

$\frac{cy}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2 + 2rxdx^2 - x^2dx^2}{2rx - x^2}\right)}$

$= \frac{cy}{r}\sqrt{\left(\frac{r^2dx^2}{y^2}\right)}$

$= \frac{cy}{r} \cdot \frac{rdx}{y} = cdx$

F. S. $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ S. $cdx = cx =$ einem unbestimmten Theil der Kugelfläche.

Wird aber $x = r$; so ist $cx = cr =$ der krummen Oberfläche einer halben Kugel, dann aber druckt c die Peripherie des größten Cirkels der Kugel aus.

Will man endlich die Oberfläche der ganzen Kugel haben, so setze man $x = 2r$; dann ist $cx = 2cr$.

Dis stimmet auch mit dem Werth überein, wie ihn die Geometrie für die Kugelfläche finden lehret, wenn man beyde Formeln in Zahlen resolviret. Denn Superficies sphaerae ist $= 4\,\pi.\,AC^2$, wo $\pi = 3{,}14$; AC = radio circuli maximi sphaerae. S. die 360ste Seite vom Auszuge des H. Hofrath Karsten.

§. 154.

Die krumme Oberfläche eines sogenannten parabolischen Afterkegels zu bestimmen.

Weil $ax = y^2$

so ist $adx = 2ydy$

und $dx = \frac{2ydy}{a}$

F. $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$

F. $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{cy}{r} \sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2 + a^2dy^2}{a^2}\right)}$

$= \frac{cydy}{ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$

Man setze $\sqrt{(4y^2 + a^2)} = n$

so ist $4y^2 + a^2 = n^2$

und $8ydy = 2ndn$

F. $ydy = \frac{ndn}{4}$

F. $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{c}{ar} \cdot \frac{ndn}{4} \cdot n = \frac{cn^2dn}{4ar.}$

F. S. $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = $ S. $\frac{cn^2dn}{4ar} = \frac{cn^3}{12ar} = \frac{cn^2n}{12ar}$

Weil aber $n = \sqrt{(4y^2 + a^2)}$
und $n^2 = 4y^2 + a^2)$

so ist S. $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{4cy^2 + ca^2}{12ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$

Es

Es frågt sich nun, ob dis der wahre Werth für die krumme parabolische Kegelfläche sey. Man setze zu dem Ende $y = 0$, so muß der ganze Werth auch $= 0$ werden, wenn es anders der wahre Werth ist. Bleibt aber etwas übrig, so ist klar, daß jener gefundene Werth um den gebliebenen Rest zu groß sey, und folglich von obigen Werthe noch abgezogen werden müsse.

Wenn also $y = 0$,

$$\text{so ist } \frac{4cy^2 + ca^2}{12ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)} = \frac{4c.0 + ca^2}{12ar} \sqrt{(4.0 + a^2)}$$

$$= \frac{ca^2}{12ar} \sqrt{a^2}$$

$$= \frac{ca^2}{12r}$$

Da also $\frac{ca^2}{12r}$ übrig bleibt, so muß dieser Rest von obigen Werthe noch abgezogen werden, und dann ist derjenige Theil der krummen parabolischen Kegelfläche, deren Axe nur ein gewisser Theil von der ganzen Axe des parabolischen Kegels ist =

$$\frac{4cy^2 + ca^2}{12ar} \sqrt{(4y^2 + a^2)} - \frac{a^2c}{12r}.$$

Will man aber die ganze krumme Oberfläche eines parabolischen Kegels von bestimmter Höhe wissen, so setze man die größte halbe Ordinate oder $y = r$, so ist die ganze krumme parabolische Kegelfläche =

$$\frac{4cr^2 + a^2c}{12ar} \sqrt{(4r^2 + a^2)} - \frac{a^2c}{12r}.$$

2. Anwendung der Integralrechnung zu Bestimmung des Verhältnisses der krummen Linien zu andern geraden, oder von der Rectification der krummen Linien.

§. 155.

Bestimmt man das Verhältniß einer krummen Linie gegen gewisse gerade Linien, die an jener gezogen werden können, so hat man die krumme Linie rectificirt, oder in eine gerade Linie verwandelt.

§. 156.

Wenn sich die halbe Ordinate MP (F. 21.) durch den unendlich kleinen Raum Pp bewegt; so ist der unendlich kleine Bogen Mm das Differential des Bogens AM. Weil aber Mm unter diesen Umständen als eine gerade Linie betrachtet werden kann;
so ist $Mm^2 = MN^2 + mN^2$ oder
$= dx^2 + dy^2$.

F. $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ = dem Differential von AM.

Sucht man nun aus der Gleichung einer krummen Linie einen Werth für dx^2 oder dy^2 und substituirt denselben in jener Formel, integrirt dann dieselbe, so hat man diese krumme Linie rectificirt.

§. 157.

Weil sich die sogenannte Neilische oder cubische Parabel, in welcher $ax^2 = y^3$, vollkommen sowohl quadriren als auch rectificiren läßt, so will ich von dieser den Anfang machen.

Wenn

Wenn also hier $ax^2 = y^3$

so ist $2axdx = 3y^2dy$

und $dx = \frac{3y^2dy}{2ax}$

F. $dx^2 = \frac{9y^4dy^2}{4a^2x^2} = \frac{9y^3ydy^2}{4a^2x^2}$

$= \frac{9ax^2ydy^2}{4a^2x^2}$

$= \frac{9ydy^2}{4a}$

F. Element dieser Parabel $= \sqrt{\left(\frac{9ydy^2 + 4ady^2}{4a}\right)}$

$= dy\sqrt{\left(\frac{9y + 4a}{4a}\right)}$

Man setze $\sqrt{\left(\frac{9y + 4a}{4a}\right)} = n$

so ist $\frac{9y + 4a}{4a} = n^2$

und $9y + 4a = 4an^2$

F. $9dy = 8andn$

und $dy = \frac{8andn}{9}$

F. Element dieser Parabel $= \frac{8andn}{9} . n = \frac{8an^2dn}{9}$

und das Integral dieser Formel oder S. $\frac{8an^2dn}{9} = \frac{8an^3}{27}$

Uebrigens setze man $a = 1$
und weil $n^3 = n^2 . n$

$$n^2 = \frac{9y + 4a}{4a} = \frac{9y + 4}{4}$$

$$n = \sqrt{\left(\frac{9y + 4a}{4a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{9y + 4}{4}\right)}$$

so ists Integral dieser Formel $= \frac{8\left(\frac{9y+4}{4}\right)\sqrt{\left(\frac{9y+4}{4}\right)}}{27}$

$$= \frac{2(9y+4)\sqrt{\left(\frac{9y+4}{4}\right)}}{27}$$

$$= \frac{(9y+4)\sqrt{(9y+4)}}{27}.$$

Soll nun dis das wahre Integral seyn, so muß, wenn $y = 0$ gesetzt wird, die ganze Formel ebenfalls $= 0$ werden; bleibt aber etwas übrig, so ziehe man, wie §. 154, den Rest von der erhaltenen Formel ab.

Ist also $y = 0$, so ist $\frac{(9y+4)\sqrt{(9y+4)}}{27} = \frac{4\sqrt{4}}{27} = \frac{8}{27}$

F. Die cubische Parabel $= \frac{(9y+4)\sqrt{(9y+4)}}{27} - \frac{8}{27}$

§. 158.

Die gewöhnliche Apollonische Parabel aber läßt sich nicht anders, als durch eine unendliche Reihe rectificiren.

Weil hier $ax = y^2$

so ist $adx = 2ydy$

und

und $dx = \frac{2ydy}{a}$

F. $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$

F. das Element dieser Parabel $= \sqrt{\left(\frac{4y^2dy^2 + a^2dy^2}{a^2}\right)}$

$$= \frac{dy}{a} \sqrt{(4y^2 + a^2)}$$

$$= \frac{dy}{a} . (4y^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Wenn nun $a^2 = P$, $\frac{4y^2}{a^2} = Q$, $1 = m$, $2 = n$ gesetzt wird, so ist

$$P^{\frac{m}{n}} = a^{2 . \frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad = a = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . a . \frac{4y^2}{a^2} \quad . \quad . \quad = \frac{2y^2}{a} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{2y^2}{a} . \frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C.$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{1}{2} . -\frac{2y^4}{a^3} . \frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{4y^6}{a^5} . \frac{4y^2}{a^2} = \frac{-10y^8}{a^7} = E.$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} . \frac{-10y^8}{a^7} . \frac{4y^2}{a^2} = \frac{28y^{10}}{a^9} = F \text{ rc.}$$

F. Element der Apollonischen Parabel =

$$\frac{dy}{a} \left(a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} - \frac{10y^8}{a^7} + \frac{28y^{10}}{a^9} \text{ rc.}\right)$$

 $= dy$

$$= dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} - \frac{10y^8dy}{a^8} + \frac{28y^{10}dy}{a^{10}} \text{ ꝛc.}$$

F. Integral dieser Formel =

$$y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8} + \frac{28y^{11}}{11a^{10}} \text{ u. s. w.}$$

§. 159.

Auch der Cirkel läßt sich nur durch eine unendliche Reihe rectificiren. (F. 27.)

Es sey BQ die Tangente des Winkels BCD oder des Bogens BD, welcher rectificirt werden soll. BR sey die Tangente des Bogens BE, welcher unendlich wenig größer ist, als der Bogen BD, daher auch DE als eine gerade Linie betrachtet werden kann.

Ist nun Radius $BC = 1$, $BQ = x$; so ist $QR = dx$.

Zieht man QS ⋕ DE.

so ist $\triangle CQS \backsim \triangle CDE$.

und $CQ : QS = CD : DE$.

$QS : RS = BC : BQ$ oder

$QS : RS = 1 : x$.

$RS : QR = BQ : CQ$, oder

$RS : dx = x : CQ$

$CQ^2 = BC^2 + BQ^2$

$= 1 + x^2$

$CQ = \sqrt{(1 + x^2)}$

$RS : dx = x : \sqrt{(1 + x^2)}$

$$RS = \frac{x\,dx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

$$QS : \frac{x\,dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = 1 : x.$$

QR =

$$QS = \frac{xdx}{x\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2)}}$$

$$\text{F. } \sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : DE$$

$$\text{F. } DE = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \ldots$$

F. der Bogen $BD = S.\, dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \ldots$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \ldots\ldots$$

Für einen Bogen von 45° ist die Tangente oder x = radio, also hier = 1.

F. der Bogen von 45° oder $\frac{1}{8}$ der Peripherie = $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots\ldots$
und ein Bogen von 90° oder $\frac{1}{4}$ der Peripherie = $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} \ldots\ldots$

Ist aber der Durchmesser = 1; so ist
ein Bogen von 90° auch $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots$
und die ganze Periph. $= 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \ldots$
$= 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots)$

§. 160.

Will man aus dem Sinus versus BF (F. 27.) den zugehörigen Bogen BD bestimmen, so betrachte man ihn als die Abscisse und setze $BF = x$, und dann ist der correspondirende Sinus die halbe Ordinate; man setze also $DF = y$. Anstatt a aber setze man in der Cirkelgleichung $2r$, so ist

$$y^2 = 2rx - x^2$$

und $2ydy = 2rdx - 2xdx$
oder $ydy = rdx - xdx$

und

und $dy = \dfrac{rdx - xdx}{y}$

$$\text{F. } dy^2 = \frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2} \text{ (weil } y^2 = 2rx - x^2\text{)}$$

$$\text{F. } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}\right)}$$

$$dx^2 = \frac{2rxdx^2 - x^2dx^2}{2rx - x^2}$$

$$\text{F. } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2rxdx^2 - x^2dx^2 + r^2dx^2 - 2rxdx^2 + x^2dx^2}{2rx - x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{r^2dx^2}{2rx - x^2}\right)} = \frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= rdx. \frac{1}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$= rdx.\,(2rx - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man aber $r = \frac{1}{2}$

so ist $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \dfrac{dx}{2}.\,(x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

und setzt man $x = P$, so ist $\dfrac{-x^2}{x} = -x = Q$, $-1 = m$, $2 = n$.

F. $P^{\frac{m}{n}} =$ . . . . $x^{-\frac{1}{2}} = A$,

$\frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{2}.\, x^{-\frac{1}{2}} - x =$ . . $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2} = B$,

$\dfrac{m - n}{2n} BQ = -\frac{3}{4}.\, \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2}.\, - x =$. $\dfrac{3x^{\frac{3}{2}}}{8} = C$.

m — 2n

$$\frac{m-2n}{3n}\,CQ = -\tfrac{5}{6}\cdot\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8}\cdot -x = \quad \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{16} = D.$$

$$\frac{m-3n}{4n}\,DQ = -\tfrac{7}{8}\cdot\frac{5x^{\frac{5}{2}}}{16}\cdot -x = \quad \frac{35x^{\frac{7}{2}}}{128} = E.$$

$$\frac{m-4n}{5n}\,EQ = -\tfrac{9}{10}\cdot\frac{35x^{\frac{7}{2}}}{128}\cdot -x = \quad \frac{63x^{\frac{9}{2}}}{256} = F$$

u. s. w.

F. $\frac{dx}{2}(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$\frac{dx}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{16} + \frac{35x^{\frac{7}{2}}}{128} + \frac{63x^{\frac{9}{2}}}{256}\ldots\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \tfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx + \tfrac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx + \tfrac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}dx + \tfrac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}dx \ldots\ldots)$$

und das Integral dieser Formel =

$$\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{\frac{35}{256}x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + \frac{\frac{63}{512}x^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}}\ldots$$

Es ist aber

$$\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1.\ x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{4}x^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{1}{6}x.\ x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{16}x^{\frac{5}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{3}{40}x^2.\ x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{5}{32}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{5}{32}x^{\frac{7}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ \tfrac{5}{112}x^3 : x^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{35}{256}x$

$$\frac{\frac{35}{256}x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{35}{256} x^{\frac{9}{2}} = \ldots\ldots \frac{35}{1152} x^4 . x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{63}{512}x^{\frac{11}{2}}}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11} \cdot \frac{63}{512} x^{\frac{11}{2}} = \ldots \frac{63}{2816} x^5 . x^{\frac{1}{2}} \text{ꝛc.}$$

Folglich das Integral des zu jedem Sinus versus gehörigen Bogens =

$$x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40} + \frac{5x^3}{112} + \frac{35x^4}{1152} + \frac{63x^5}{2816} \ldots\right)$$

Nun ist $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

F. dieser Bogen =

$$\sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{3x^2}{40} + \frac{5x^3}{112} + \frac{35x^4}{1152} + \frac{63x^5}{2816} \ldots\right)$$

Wird aber der Sinus versus = radio und ist radius = 1; so ist der Quadrant =

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \frac{63}{2816} \ldots\ldots$$

§. 161.

Will man aus dem Sinus' eines Winkels den zugehörigen Bogen bestimmen, so setze man wieder $a = 2r$, den Sinus, als halbe Ordinate, $= y$, den Sinus versus aber $= x$.

Dann ist $2rx - x^2 = y^2$

und $2rdx - 2xdx = 2ydy$

oder $rdx - xdx = ydy$

und $dx = \frac{ydy}{r - x}$

und $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{r^2 - 2rx + x^2}$.

F.

F. $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(\frac{y^2dy^2}{r^2-2rx+x^2}+dy^2\right)}$

Es ist aber $2rx-x^2=y^2$

F. $-2rx+y^2=-y^2$

F. $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(\frac{y^2dy^2+r^2dy^2-y^2dy^2}{r^2-y^2}\right)}$

$$=\sqrt{\left(\frac{r^2dy^2}{r^2-y^2}\right)}=\frac{rdy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}=rdy.\frac{1}{(r^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=rdy.(r^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Setzt man nun $r^2=P$, so ist $-\frac{y^2}{r^2}=Q$, $-1=m$, $2=n$.

und $P^{\frac{m}{n}}=r^{2.-\frac{1}{2}}=\dots r^{-1}=\dots\frac{1}{r}=A.$

$\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{2}.\frac{1}{r}.\frac{-y^2}{r^2}=\dots\frac{y^2}{2r^3}=B.$

$\frac{m-n}{2n}BQ=-\frac{3}{4}.\frac{y^2}{2r^3}.\frac{-y^2}{r^2}=\dots\frac{3y^4}{8r^5}=C.$

$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\frac{5}{6}.\frac{3y^4}{8r^5}.\frac{-y^2}{r^2}=\dots\frac{5y^6}{16r^7}=D.$

$\frac{m-3n}{4n}DQ=-\frac{7}{8}.\frac{5y^6}{16r^7}.\frac{-y^2}{r^2}=\dots\frac{35y^8}{128r^9}=E.$

$\frac{m-4n}{5n}EQ=-\frac{9}{10}.\frac{35y^8}{128r^9}.\frac{-y^2}{r^2}=\dots\frac{63y^{10}}{256r^{11}}=F.$ ꝛc.

F. $rdy.\frac{1}{\sqrt{(r^2-y^2)}}=rdy\left(\frac{1}{r}+\frac{y^2}{2r^3}+\frac{3y^4}{8r^5}+\frac{5y^6}{16r^7}+\frac{35y^8}{128r^9}+\frac{63y^{10}}{256r^{11}}\dots\right)$

$=dy$

$$= dy + \frac{y^2dy}{2r^2} + \frac{3y^4dy}{8r^4} + \frac{5y^6dy}{16r^6} + \frac{35y^8dy}{128r^8} + \frac{63y^{10}dy}{256r^{10}} \ldots$$

$$\text{F. S. } rdy \cdot \frac{1}{\sqrt{(r^2-y^2)}} =$$

$$y + \frac{y^3}{6r^2} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \frac{35y^9}{1152r^8} + \frac{63y^{11}}{2816r^{10}} \ldots$$

Wird aber $y = r$, so ist der Bogen ein Quadrant und $= r + \frac{r}{6} + \frac{3r}{40} + \frac{5r}{112} + \frac{35r}{1152} + \frac{63r}{2816} \ldots$,

Setzt man nun $r = 1$, so ist der Quadrant $=$
$1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \frac{63}{2816} \ldots$
und die ganze Peripherie $=$
$4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{28} + \frac{35}{288} + \frac{63}{704} \ldots$

3. Anwendung der Integralrechnung zu Bestimmung des körperlichen Inhalts.

§. 162.

Das Element eines Körpers, dessen Grundfläche und alle mit derselben parallelgehenden Flächen Cirkelflächen sind, ist eine Cirkelscheibe, deren Höhe oder Dicke Bb (F. 24.) unendlich klein ist. Man findet aber dis Element, wenn man eine Cirkelfläche in die Höhe Bb multiplicirt.

§. 163.

Druckt nun $r : p$ überhaupt das Verhältniß des Radii zur Peripherie aus, und ist der besondre Radius allemahl die halbe Ordinate oder y, welche derjenigen Abscisse correspondiret, welche die Höhe des Körpers bestimmt;

so

so ist r : p = y : Periph. die der Radius y beschreibt.

F. ist diese Periph. $= \frac{py}{r}$

Multiplicirt man diesen Werth für die Peripherie in $\frac{y}{2}$, so drückt das Product $\frac{py^2}{2r}$ die Cirkelfläche aus, deren Radius = y.

Multiplicirt man endlich diese Cirkelfläche in die Höhe Bb = dx, so ist die unendlich dünne Scheibe oder das Element eines solchen Körpers $= \frac{py^2 dx}{2r}$.

§. 164.

Sucht man nun aus einer besondern Gleichung einen Werth für y^2 und substituirt denselben in der allgemeinen Formel, so bekommt man das Element desjenigen Körpers, dessen Erzeugung man sich durch die Bewegung derjenigen krummen Linie um ihre Axe, aus deren Gleichung der Werth für y^2 hergeleitet ist, vorstellen kann. Wird endlich dis Element integrirt, so erhält man den verlangten körperlichen Inhalt.

§. 165.

Den körperlichen Inhalt eines Kegels zu bestimmen.

Die Entstehung eines Kegels kann man sich, wie schon gesagt, durch die Bewegung eines rechtwinklichten Dreyecks um einen seiner Catheten, der dann die Höhe ist und = a seyn soll, vorstellen; der andre Cathete aber ist die Grundlinie, und weil er bey der Bewegung einen Cirkel beschreibt, so setze man ihn = r.

Dann ist $a : r = x : y$

und $ay = rx$

und $y = \frac{rx}{a}$

und $y^2 = \frac{r^2 x^2}{a^2}$

$$F.\ \frac{py^2dx}{2r} = \frac{pr^2x^2dx}{2a^2r} = \frac{prx^2dx}{2a^2}$$

$$F.\ S.\ \frac{py^2dx}{2r} = S.\ \frac{prx^2dx}{2a^2} = \frac{prx^3}{6a^2}$$

Wird nun $x = a$; so ist $\frac{prx^3}{6a^2} = \frac{a^3pr}{6a^2} = \frac{apr}{6}$

Folglich der ganze Kegel $= \frac{apr}{6} = \frac{pr}{2} \cdot \frac{a}{3}$

Man suche also die Peripherie der Grundfläche, multiplicire sie in den halben Radius, so bekommt man die Grundfläche, und multiplicirt man diese in den dritten Theil der Höhe, so bekommt man mit dem Producte den körperlichen Inhalt des ganzen Kegels.

Hiemit stimmt der Inhalt überein, wie ihn die Geometrie für den Kegel finden lehret.

Es ist aber r = radio der Grundfläche und p ist die Peripherie, die mit dem radius beschrieben wird, folglich $\frac{pr}{2}$ = der Grundfläche.

Weil aber die Grundfläche auch $= r^2P$, wo $P = 3,14$; so wäre dann der körperliche Inhalt eines solchen Kegels $= \frac{ar^2P}{3}$.

§. 166.

Est enim … 3,14 vel P = … 2r : 2rP = peripheria circuli, de quo quaestio est … 2rP substitui oportet loco p, ergo erit in formula superiori … $\frac{r}{2} \times \frac{a}{3} = 2rP \times \frac{r}{2} \times \frac{a}{3} = r^2P \times \frac{a}{3}$

§. 166.

Hieraus läßt sich nun auch leicht eine Formel für den abgekürzten Kegel finden. (F. 22.)

Man setze die Höhe cD des fehlenden Stücks $= x$
die Höhe CD des abgekürzten Kegels „ $= m$
so würde die Höhe des ganzen Kegels seyn $= m + x$

Setzt man nun
den Radius AC der Grundfläche „ „ $= R$
den Radius ac der obern Fläche „ „ $= r$
so ist der Inhalt des ganzen Kegels $= \frac{(m+x)R^2P}{3}$.

des fehlenden Stücks $= \frac{xr^2P}{3}$

F. Inhalt des abgekürzten Kegels $= \frac{(m+x)R^2P}{3} - \frac{xr^2P}{3}$

Man bestimme also x.

Weil $CD : cD = AC : ac$.
oder $m+x : x = R : r$.

so ist $Rx = mr + rx$

und $(R-r)x = mr$.

$$F.\ x = \frac{mr}{R-r}.$$

$$m = m$$

$$F.\ m+x = m + \frac{mr}{R-r} = \frac{mR-mr+mr}{R-r}$$

$$F.\ m+x = \frac{mR}{R-r}.$$

$$\text{F.}\ \frac{(m+x)PR^2}{3} - \frac{xPr^2}{3} = \left(\frac{mR}{R-r}\cdot\frac{PR^2}{3}\right) - \left(\frac{mr}{R-r}\cdot\frac{Pr^2}{3}\right)$$

$$= \frac{mPR^3 - mPr^3}{3\cdot(R-r)}$$

$$= \frac{R^3 - r^3}{R-r}\cdot\frac{mP}{3}$$

Es ist aber $\frac{R^3-r^3}{R-r} = R^2 + r^2 + Rr.$

F. Inhalt des abgekürzten Kegels $= (R^2 + r^2 + Rr)\frac{mP}{3}$.

§. 167.

Sucht man den körperlichen Inhalt einer Kugel, so setze man in der Cirkelgleichung $a = 2r$, dann ist $y^2 = 2rx - x^2$

und $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{2prxdx}{2r} - \frac{px^2dx}{2r}$

$$= pxdx - \frac{px^2dx}{2r}$$

F. S. $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{6r} =$ dem körperlichen Inhalt eines unbestimmten Stücks der Kugel. Wird nun $x = r$; so bekommt man den Inhalt einer halben Kugel $= \frac{pr^2}{2} - \frac{pr^2}{6} = \frac{3pr^2 - pr^2}{6} = \frac{pr^2}{3}$.

Wird endlich $x = 2r$; so ist $x^2 = 4r^2$, $x^3 = 8r^3$ und der Inhalt einer ganzen Kugel ist $= \frac{4pr^2}{2} - \frac{8pr^2}{6} = \frac{6pr^2 - 4pr^2}{3} = \frac{2pr^2}{3}$.

§. 168.

Um den Inhalt einer sogenannten Kuppel oder Kugelgewölbes, dessen Höhe gleich radio circuli maximi sphaerae, zu bestimmen, ziehe man den innern Raum von dem Raum der äussern halben Kugel ab. Man setze daher die ganze Höhe gleich dem halben Durchmesser der äussern halben Kugel $= R$; die inure Höhe aber gleich dem halben innern Durchmesser $= r$.

Weil nun die halbe Kugel $= \frac{pr^2}{3}$ §. 167., so ist, wenn der eine halbe Durchmesser $= R$, die Peripherie oder $p = 2RP$, und wenn der andre halbe Durchmesser $= r$, so ist die Peripherie oder $p = 2rP$.

Folglich Raum der äussern halben Kugel $= \frac{2PR^3}{3}$

Raum der innern halben Kugel $= \frac{2Pr^3}{3}$

F. äussre halbe Kugel — der innern $= \frac{2PR^3}{3} - \frac{2Pr^3}{3}$

$= (R^3 - r^3)\frac{2}{3}P.$

§. 169.

Den körperlichen Inhalt einer Sphäroide oder einer elliptischen Kugel zu bestimmen.

Man setze

die halbe große Axe $AC = a$ (F. 14.)

die halbe kleine Axe $CD = r$, $CP = x$, $MP = y$.

so ist $AP = AC - CP = a - x$

$BP = BC + CP = a + x$

F. $AP.\ BP = a^2 - x^2$.

Weil nun $CD^2 : AC^2 = MP^2 : AP.\ BP$ §. 77.
oder $r^2 : a^2 = y^2 : a^2 - x^2$.

F. $a^2y^2 = a^2r^2 - r^2x^2$.

und $y^2 = r^2 - \frac{r^2x^2}{a^2}$

$$\text{F. } \frac{py^2dx}{2r} = \frac{pr^2dx}{2r} - \frac{pr^2x^2dx}{2a^2r}$$

$$= \frac{prdx}{2} - \frac{prx^2dx}{2a^2}$$

$$\text{F. S. } \frac{py^2dx}{2r} = \frac{prx}{2} - \frac{prx^3}{6a^2}$$

Setzt man $x = a$,

so ist die halbe Sphäroide $= \frac{apr}{2} - \frac{apr}{6}$

$$= \frac{apr}{3}$$

F. Inhalt einer ganzen Sphäroide $= \frac{2apr}{3}$.

§. 170.

Wollte man den Inhalt einer sphäroidischen oder elliptischen Gewölbedecke berechnen, so dürfte man nur die innre halbe Sphäroide von der äussern abziehen.

Man setze daher
die halbe große / die halbe kleine } Axe der äussern Sphäroide $= \begin{cases} A. \\ R, \end{cases}$

so ist aus der Formel $\frac{apr}{3}$ die Peripherie oder $p = 2PR$

und

Und setzt man

die halbe große ⎫
die halbe kleine ⎭ Axe der innern Sphäroide $= \begin{cases} a. \\ r, \end{cases}$

so ist die Peripherie oder $p = \ldots \ldots 2Pr.$

Folglich die äußre halbe Sphäroide $= \frac{2APR^2}{3}$

die innre halbe Sphäroide $= \frac{2aPr^2}{3}$

F. der Raum der halben äussern Sphäroide weniger dem Raume der halben innern Sphäroide $= \frac{2APR^2}{3} - \frac{2aPr^2}{3}$

$= (AR^2 - ar^2)\frac{2}{3}P.$

§. 171.

Den körperlichen Inhalt einer Paraboloide oder eines parabolischen Kegels zu bestimmen.

Weil $y^2 = ax$

---

so ist $\frac{py^2dx}{2r} = \frac{apxdx}{2r}$

---

und $S. \frac{py^2dx}{2r} = S. \frac{apxdx}{2r}$

$= \frac{apx^2}{4r} = \frac{px}{4r}. ax$

$ax = y^2$

F. $S. \frac{py^2dx}{2r} = \frac{pxy^2}{4r}$ = dem Inhalte eines unbestimmten Stücks, weil x unbestimmt ist.

Setzt man aber x = a = der ganzen Höhe; die correspondirende halbe Ordinate y = radio der

Grund-

Grundfläche = r, so ist der Inhalt eines parabolischen Kegels von bestimmter Höhe =

$$\frac{apr^2}{4r} = \frac{apr}{4}$$

(Der zugespitzte Kegel war = $\frac{apr}{6}$ §. 165.

Hat also der parabolische Kegel mit dem zugespitzten Kegel gleiche Grundfläche und Höhe; so verhält sich

dieser zu jenen = $\frac{apr}{6} : \frac{apr}{4} = 4 : 6 = 2 : 3$

§. 172.

Eine Mine mit dem erforderlichen Vorrath von Pulver versehen zu können, muß man den Inhalt der Erde wissen, welche durch die Gewalt des entzündeten Pulvers herausgehoben werden soll. Der sogenannte Entonnoir, welcher durch die Sprengung entsteht, soll nach der Erfahrung mehr einer bis auf den Brennpunkt abgekürzten Paraboloide, als einem umgekehrten Kegel gleichen. Ihr Brennpunkt aber soll in der Pulverkammer liegen.

Diesen Erfahrungssatz als richtig vorausgesetzt, berechne man zwar die ganze Paraboloide: weil aber bey Sprengung der Mine nur die über den Brennpunkt liegende Erde herausgeworfen wird; so ziehe man vom Inhalte der ganzen Paraboloide den Raum von der Spitze derselben bis an den Brennpunkt ab, so erhält man mit dem Rest die Erdmasse, die herausgeworfen wird.

Die ganze Paraboloide ist = $\frac{apr}{4}$

Setzt

Setzt man nun AF = x, und EF = y;

so ist der untere Theil AEI $= \frac{pxy}{4}$

Man bestimme AF.

Es sey FH = 12'. Aus der Erfahrung weiß man, daß GH = FH.

Weil nun $FG^2 = FH^2 + GH^2 = 2GH^2$

so ist $FG = \sqrt{2GH^2} = \sqrt{2.\,12^2} = \sqrt{288} = 17'$

FG = DH (§. 22.)

F. DH = 17'

DH = DF + FH

F. DF = DH − FH = 17 − 12 = 5'.

DF = AD + AF = 2AF

F. $\frac{DF}{2} = AF = 2{,}5'$.

EF = 2AF = 5'

Es ist also die ganze Höhe oder a = AF + FH = 12 + 2,5 = 14,5'

Wenn nun r = GH = 12',

so ist p = 2rP = 2. 12. 3,14 = 75,36

folglich $\frac{apr}{4} = \frac{14{,}5.\ 75{,}36.\ 12}{4} = 3278{,}16.$

und wenn y oder EF = 5

so ist p = 31,4

folglich $\frac{pxy}{4} = \frac{31{,}4.\ 2{,}5.\ 5}{4} = 98{,}12.$

Folglich Inhalt des Entonnoirs von oben bis auf den Brennpunkt = 3180 Cubicfuß.

Wäre also der hier zum Grunde gelegte Satz richtig, so wäre auf die Art der Inhalt des Entonnoirs

bey

bey der angenommenen Tiefe von 12 Fuß fast noch einmahl so groß, als nach der Berechnung des H. von Vauban, Struensee und andrer bey gleicher Tiefe der Pulverkammer herauskommt.

§. 173.

Den körperlichen Inhalt einer Hyperboloide zu bestimmen.

Weil in der Hyperbel das Quadrat der kleinen Axe zum Quadrate der Queraxe sich verhält, wie das Quadrat der halben Ordinaten zu dem Rectangel aus den correspondirenden Abscissen in die Summe aus diesen Abscissen und aus der Queraxe §. 40., oder wenn die conjungirte Axe $= 2r$, die Queraxe $= 2a$; so ist $4r^2 : 4a^2 = y^2 : (2a + x)\, x$.

oder $r^2 : a^2 = y^2 : 2ax + x^2$

F. $a^2 y^2 = 2ar^2 x + r^2 x^2$

und $y^2 = \frac{2r^2 x}{a} + \frac{r^2 x^2}{a^2}$

F. $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{2pr^2 x dx}{2ar} + \frac{pr^2 x^2 dx}{2a^2 r}$

$= \frac{prx dx}{a} + \frac{prx^2 dx}{2a^2}$

F. S. $\frac{py^2 dx}{2r} = \frac{prx^2}{2a} + \frac{prx^3}{6a^2}$ = dem Inhalt eines unbestimmten Stücks der Hyperboloide.

Wird aber $x = h$ = der Höhe, so ist der Inhalt einer Hyperboloide von bestimmter Höhe $= \frac{h^2 pr}{2a} + \frac{h^3 pr}{6a^2}$.

Druckfehler.

Seite.	Zeile.	soll es heissen.
7.	15.	$MP^2 : mp^2 = AP : Ap.$
10.	20.	$AP = z$
11.	20.	$FP^2 = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$
13.	15.	so muß.
14.	22.	$bd = \frac{ab}{2} = \frac{a}{4}$
	23.	der auf der einen Seite.
17.	20.	$a = \frac{bx^2}{y^2 - bx}$
28.	2.	$fQ - FQ < AB.$
30.	17.	Queraxe, statt großen.
35.	8.	OW. Ow $= AD^2$ §. 51. (Denn man darf nur aus F. 13. GM, gM anstatt OW. Ow setzen.)
43.	11.	$\frac{bx - y^2}{b}$ statt $\frac{bx - y}{b}$
51.	19.	$bv - \frac{bv^2}{a}$ statt $bv = \frac{bv^2}{a}$

vor-

51. vorletzte Zeile $ax - x^2$ statt $ax = x^2$.

54. 14. $\frac{a^2}{4} : ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - c^2 : MP^2$.

55. 12. $fM^2 = c^2 + ac + \frac{a^2}{4}$ u. s. w.

57. 12. als auch, statt auch.

58. 7. $fO + NO = fO + FO$.

66. 3. $\frac{yzd.\, vx - vxd.\, yz}{y^2 z^2}$.

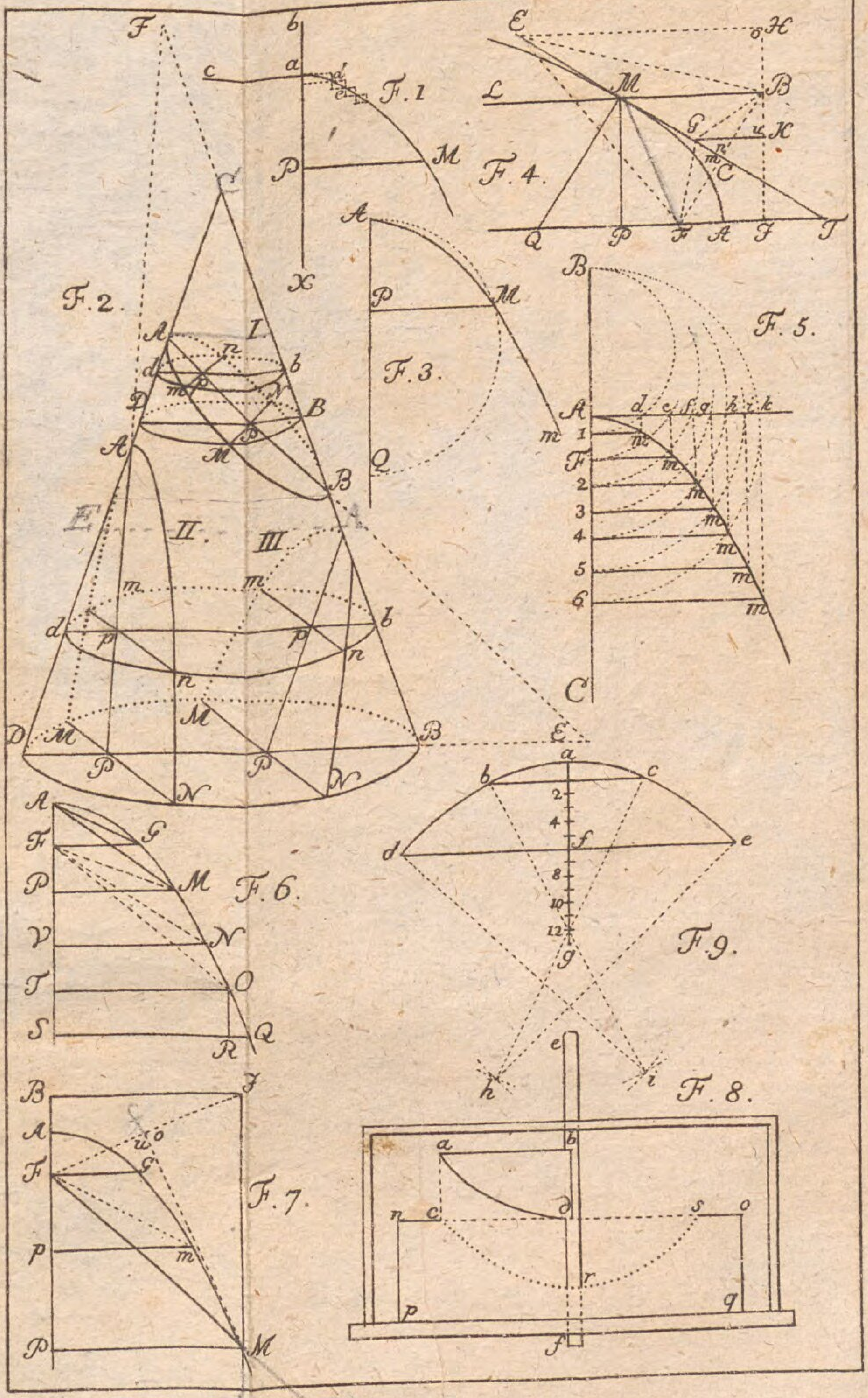
6. $d.\, \frac{vx}{yz}$

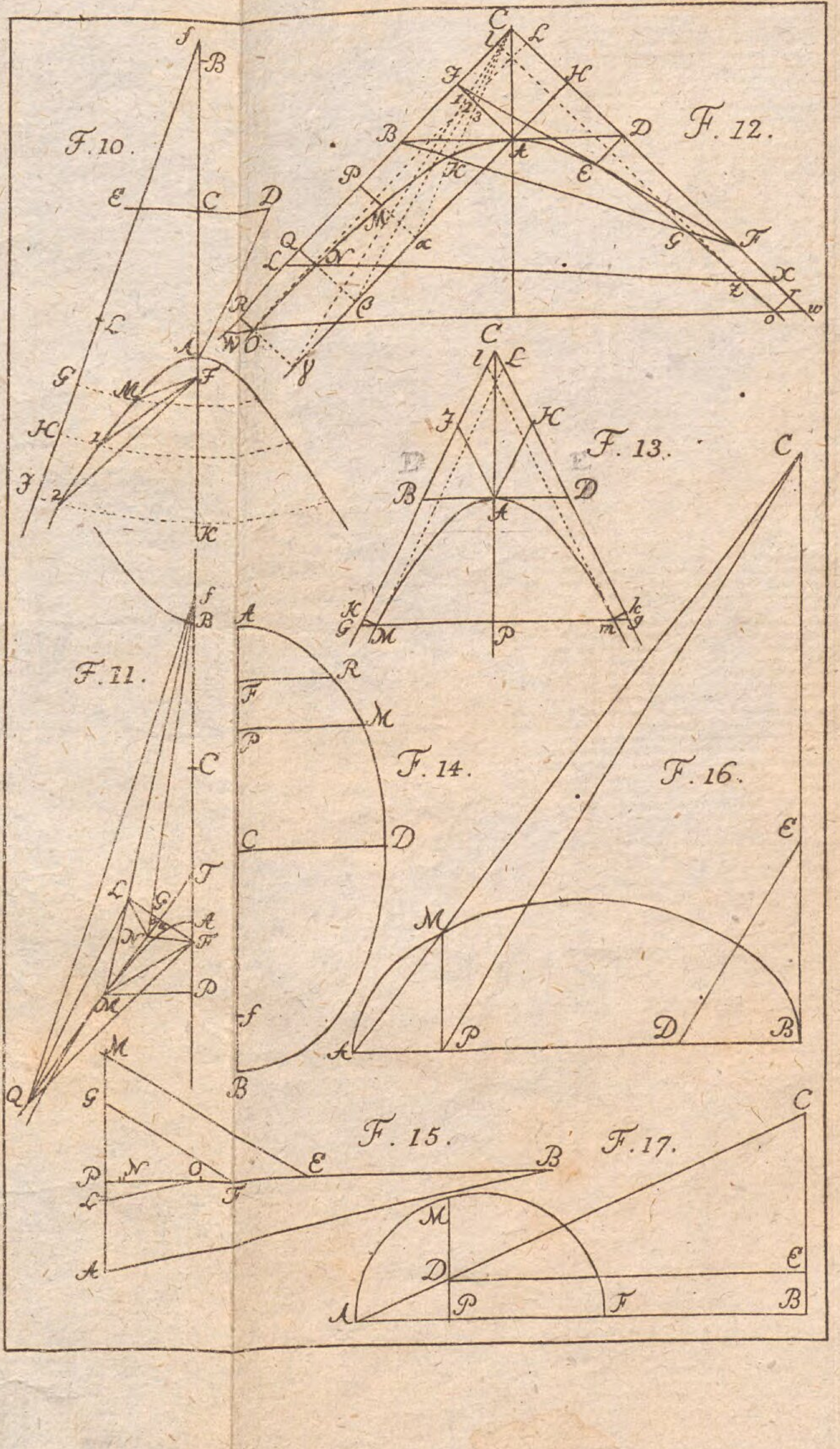
70. 4. $d.\, \frac{1}{x^2} = d.\, x^{-\frac{1}{2}}$ u. s. w.

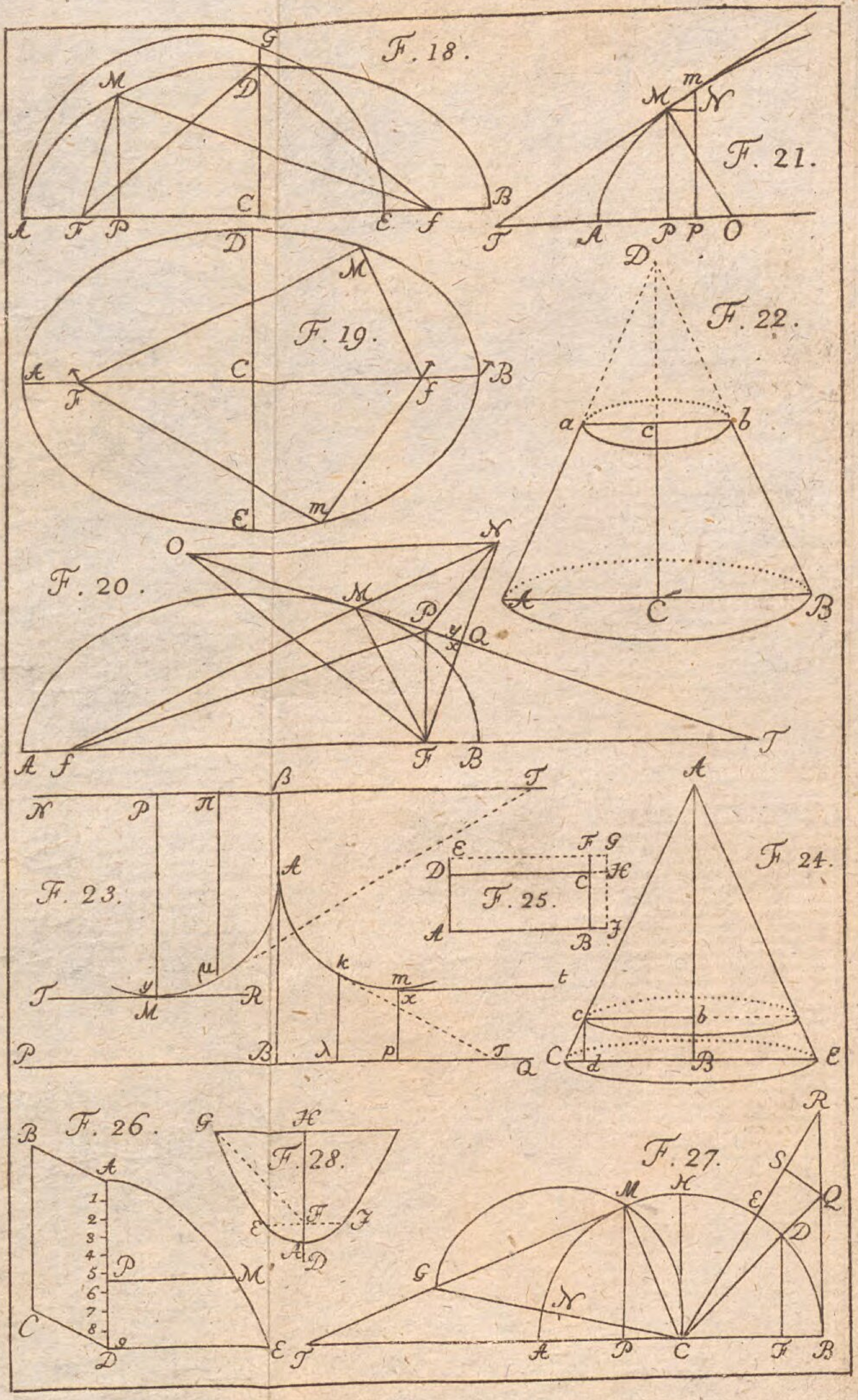
15. Abſciſſe.

72. 20. $\frac{ydx}{dy} = \frac{y}{dy} .\, \frac{2ydy}{a-2x}$

93. 9. $-\frac{x^5}{40r^3}$


F.1
F.2
F.3
F.4
F.5
F.6
F.7
F.8
F.9


F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16.
F. 17.


F. 18.
F. 19.
F. 20.
F. 21.
F. 22.
F. 23.
F. 24.
F. 25.
F. 26.
F. 27.
F. 28.

De Parabola notanda sunt sequentia puncta.

I°. Aequatio $y^2 = bx$

II°. Esse $Y^2 : y^2 = X : x$

III°. Esse $b : y = y : x$.

IV°. distantiam foci a vertice esse $= \frac{b}{4}$ vel $\frac{a}{4}$.

V°. Esse radium vectorem $= x + \frac{b}{4}$ vel $x + \frac{a}{4}$

VI°. Descriptio tangentis.

Quid subtangens? Normalis? Subnormalis?

~~Sex~~ septem Proprietates ellipseos, sive ~~sex~~ septem puncta notanda

I. $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$.

II°. $Y^2 : y^2 = (a - X)X : (a - x)x$

III°. Ex hoc affinitas ad circulo, in quo etiam $y^2 = ax - x^2$

IV°. Expressio et inventio axis minoris et inde, esse
$b : c = c : a$, et nova aequatio

V°. Inventio et expressio distantiae foci. $\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$
vel $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{4}}$

VI°. Esse summam radiorum vectorum aequalem
axi maiori.

VII° Problema de tangente invenda.

De hyperbola sive asymptotis quatuor puncta.

I°. $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$

II°. $Y^2 : y^2 = (a + X)X : (a + x)x$

III° distantia foci. $\pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}) - \frac{1}{2}a$ vel
vel $\pm \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{4}}) - \frac{1}{2}a$.

IV°. Esse Differentia radiorum vectorum = axi majori.

V°. Inventio tangentis.

$$\frac{y^2+x^2}{\sqrt{y^2+x^2}} = \sqrt{y^2+x^2}$$

$1^h\ 29'\ 28''$ initium eclips. ☉ die 3 Apr. 1791 tempus verum.

$4^h\ 1'\ 10''$ finis eclips.

$2^h\ 31'\ 42''$

De Asymtotis

I° quomodo fiant. v. quid sint?

II°. Quomodo oriat. linea potentiæ. et quid potentia?

III°. Cui potentia aequalis?

IV°. Quare asymtoti n attingant curvam? Ob duplici de causa. quia differentia □torum $GP^2 - PM^2 = AD^2$. et quia $Cr \times or = AH^2$. h.e. $xy = a^2$ ergo

$$x = \frac{a^2}{y} \text{ ergo}$$

$$x = \frac{a^2}{0} = \infty.$$